

TD, Dynamique des Systèmes Mécaniques

Bras Robot JOCKEY, notion de couplage

► Paramétrage

Le schéma cinématique spatial (cf. Figure 1) présente un modèle simplifié du bras robot Jockey. On y retrouve les 3 axes dénommés: épaule (A), poignet (B) et baguette (C).

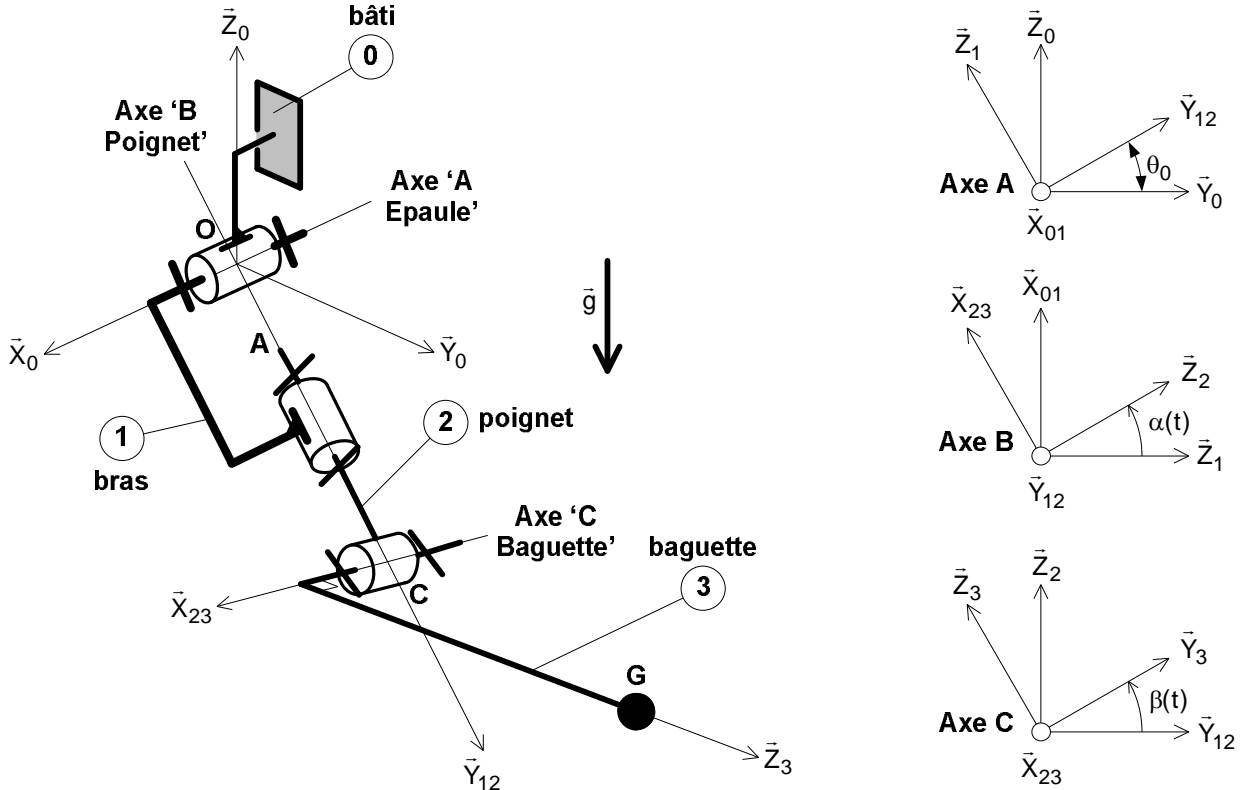


Fig. 1, schéma cinématique et paramétrage

On donne : $\vec{OC} = L\vec{Y}_{12}$, $\vec{CG} = d\vec{X}_{23} + H\vec{Z}_3$

On se place dans la configuration suivante : $\theta_0 = \text{cste} \in [0, -90^\circ]$. Seuls les axes B et C sont motorisés. Dans ces conditions, on note que le point C est fixe dans R_0 .

► Hypothèses

- Toutes les liaisons sont supposées parfaites ;
- $R_0(O, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ supposé galiléen ;
- Masse ponctuelle liée à (3) (notée m) en G ;
- Moment d'inertie du solide (2) suivant la direction \vec{Y}_{12} notée I_2 ;
- Champ de gravité $\vec{g} = -g\vec{Z}_0$;
- Action mécanique exercée par le stator (lié à 1) du moteur M1 sur le rotor (lié à 2) :

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_{m1} \vec{Y}_{12} \end{array} \right\}_A ;$$

- Action mécanique exercée par le stator (lié à 2) du moteur M2 sur le rotor (lié à 3) :

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_{m2} \vec{X}_{23} \end{array} \right\}_C .$$

On cherche à mettre en évidence le phénomène de couplage des deux axes B et C lors de la mise en rotation de la baguette (mouvement de Raali). Pour cela, on propose une étude dynamique (utilisant les théorèmes généraux) à partir du modèle simplifié du bras robot Jockey.

► Questions

- Question 1 :** En utilisant le Théorème du Moment Dynamique **TMD** au point C en projection sur \bar{X}_{23} à la baguette **(3)** dans son mouvement par rapport à **(1)** fixe dans R_0 , déterminer l'équation de mouvement de **(3)** ;
- Question 2 :** En utilisant le Théorème du Moment Dynamique **TMD** au point C en projection sur \bar{Y}_{12} à l'ensemble $\Sigma=(2U3)$ dans son mouvement par rapport à **(1)** fixe dans R_0 , déterminer l'équation de mouvement de Σ ;
- Question 3 :** Extraire des deux équations précédentes, les deux termes de couplage ;

On place le bras en position verticale et en mouvement de Raali (fréquence de rotation $\dot{\beta}$ supposée constante). On choisit la position particulière $\alpha = 0$.

- Question 4 :** Directement sur le bras, estimer les valeurs des 3 constantes (d, H, m). Préciser les unités.
- Question 5 :** Pour la fréquence maximale de rotation de la baguette en mouvement de Raali, tracer l'évolution temporelle de $C_{m1}(t)$. Commenter le résultat numérique obtenu en le corrélant notamment avec le schéma-bloc du modèle de la commande asservie en position de l'axe 'B Poignet'.

TD, Dynamique des Systèmes Mécaniques

Eléments de corrigé

A- Equation de mouvement de (3)

On applique le **TMD** au point C en projection sur \bar{X}_{23} à la baguette (3) dans son mouvement par rapport à (1) fixe dans R_0 , ce qui donne :

$$\bar{\delta}_C(3/1) \cdot \bar{X}_{23} = \bar{M}_C(\bar{3} \rightarrow 3) \cdot \bar{X}_{23}$$

La baguette (3) est soumise aux actions mécaniques de la pesanteur, du poignet (2) et du moteur **M2** ; donc :

$$\begin{aligned} \bar{M}_C(\bar{3} \rightarrow 3) \cdot \bar{X}_{23} &= \bar{M}_C(\text{grav} \rightarrow 3) \cdot \bar{X}_{23} + \bar{M}_C(2 \rightarrow 3) \cdot \bar{X}_{23} + \bar{M}_C(M2 \rightarrow 3) \cdot \bar{X}_{23} \\ &= [\bar{CG} \wedge -mg\bar{Z}_0] \bar{X}_{23} + C_{m2} \end{aligned}$$

car la pivot L_{23} (C, \bar{X}_{23}) est supposée parfaite.

$$\begin{aligned} [\bar{CG} \wedge -mg\bar{Z}_0] \bar{X}_{23} &= [(d\bar{X}_{23} + H\bar{Z}_3) \wedge -mg\bar{Z}_0] \bar{X}_{23} = mgH\bar{Y}_3 \cdot \bar{Z}_0 \\ &= mgH[\cos\beta \sin\theta_0 + \sin\beta \cos\alpha \cos\theta_0] \end{aligned}$$

On détermine le moment dynamique en (C, \bar{X}_{23}) de (3) dans son mouvement par rapport à (1), ce qui donne :

En débutant par le calcul du moment cinétique en C de (3) dans son mouvement par rapport à (1):

$$\bar{\sigma}_C(3/1) = \bar{CG} \wedge m\bar{V}_{G \in 3/1}$$

avec :

$$\bar{V}_{G \in 3/1} = \frac{d}{dt} \bar{CG} \Big|_1 = \frac{d}{dt} [d\bar{X}_{23} + H\bar{Z}_3] \Big|_1 \quad \text{avec} \quad \frac{d}{dt} \bar{X}_{23} \Big|_1 = -\dot{\alpha}\bar{Z}_2 \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \bar{Z}_3 \Big|_1 = -\dot{\beta}\bar{Y}_3 + \dot{\alpha} \cos\beta \bar{X}_{23}$$

donc :

$$\bar{V}_{G \in 3/1} = -d\dot{\alpha}\bar{Z}_2 + H[-\dot{\beta}\bar{Y}_3 + \dot{\alpha} \cos\beta \bar{X}_{23}]$$

$$\text{donc : } \bar{\sigma}_C(3/1) = m(dH\dot{\alpha} \sin\beta + H^2\dot{\beta})\bar{X}_{23} + md^2\dot{\alpha}\bar{Y}_{12} + mH^2\dot{\alpha} \cos\beta \bar{Y}_3 + mdH\dot{\beta}\bar{Z}_3$$

Le point C étant fixe dans (1), le moment dynamique en (C, \bar{X}_{23}) de (3) dans son mouvement par rapport à (1) se détermine par :

$$\bar{\delta}_C(3/1) \cdot \bar{X}_{23} = \left[\frac{d}{dt} \bar{\sigma}_C(3/1) \Big|_1 \right] \cdot \bar{X}_{23} = \frac{d}{dt} [\bar{\sigma}_C(3/1) \cdot \bar{X}_{23}] - \bar{\sigma}_C(3/1) \cdot \frac{d}{dt} \bar{X}_{23} \Big|_1$$

avec :

$$\bar{\sigma}_C(3/1) \cdot \bar{X}_{23} = mdH\dot{\alpha} \sin\beta + mH^2\dot{\beta} \quad \text{donc} \quad \frac{d}{dt} [\bar{\sigma}_C(3/1) \cdot \bar{X}_{23}] = mdH(\dot{\alpha} \sin\beta + \dot{\alpha}\dot{\beta} \cos\beta) + mH^2\ddot{\beta}$$

$$\frac{d}{dt} \bar{X}_{23} \Big|_1 = \dot{\alpha}\bar{Y}_{12} \wedge \bar{X}_{23} = -\dot{\alpha}\bar{Z}_2 \quad \text{donc} \quad \bar{\sigma}_C(3/1) \cdot \frac{d}{dt} \bar{X}_{23} \Big|_1 = mH^2\dot{\alpha}^2 \cos\beta \sin\beta + mdH\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos\beta$$

Donc au final, il vient :

$$\bar{\delta}_C(3/1) \cdot \bar{X}_{23} = mH \sin\beta (d\ddot{\alpha} + H\dot{\alpha}^2 \cos\beta) + mH^2\ddot{\beta} + mdH\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos\beta$$

L'expression finale du **TMD** au point C en projection sur \bar{X}_{23} à la baguette (3) dans son mouvement par rapport à (1) fixe dans R_0 , donne :

$$mH \sin\beta (d\ddot{\alpha} + H\dot{\alpha}^2 \cos\beta) + mH^2\ddot{\beta} + mdH\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos\beta = mgH(\cos\beta \sin\theta_0 + \sin\beta \cos\alpha \cos\theta_0) + C_{m2} \quad (1)$$

B- Equation de mouvement de Σ

On applique le **TMD** au point C en projection sur \vec{Y}_{12} à l'ensemble $\Sigma=(2U3)$ dans son mouvement par rapport à (1) fixe dans R_0 , ce qui donne :

$$\boxed{\bar{\delta}_C(\Sigma/1) \cdot \vec{Y}_{12} = \bar{M}_C(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) \cdot \vec{Y}_{12}}$$

L'ensemble Σ est soumis aux actions mécaniques de la pesanteur, du bras (1) et du moteur **M1** ; donc :

$$\begin{aligned} \bar{M}_C(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) \cdot \vec{Y}_{12} &= \bar{M}_C(\text{grav} \rightarrow 3) \cdot \vec{Y}_{12} + \bar{M}_C(\text{grav} \rightarrow 2) \cdot \vec{Y}_{12} + \bar{M}_C(1 \rightarrow 2) \cdot \vec{Y}_{12} + \bar{M}_C(M1 \rightarrow 2) \cdot \vec{Y}_{12} \\ &= \left[\vec{CG} \wedge -mg\vec{Z}_0 \right] \vec{Y}_{12} + C_{m1} \end{aligned}$$

car la pivot L_{12} (C, \vec{Y}_{12}) est supposée parfaite.

$$\begin{aligned} \left[\vec{CG} \wedge -mg\vec{Z}_0 \right] \vec{Y}_{12} &= \left[(d\vec{X}_{23} + H\vec{Z}_3) \wedge -mg\vec{Z}_0 \right] \vec{Y}_{12} = mg \left[d\vec{Z}_2 \cdot \vec{Z}_0 - H \cos \beta \vec{X}_{23} \cdot \vec{Z}_0 \right] \\ &= mg \cos \theta_0 \left[d \cos \alpha + H \cos \beta \sin \alpha \right] \end{aligned}$$

On détermine le moment dynamique en (C, \vec{Y}_{12}) de Σ dans son mouvement par rapport à (1), ce qui donne :

En débutant par le calcul du moment cinétique en C de Σ dans son mouvement par rapport à (1):

$$\bar{\sigma}_C(\Sigma/1) = \bar{\sigma}_C(3/1) + \bar{\sigma}_C(2/1)$$

$$\text{avec :} \quad \bar{\sigma}_C(3/1) = m(dH\dot{\alpha} \sin \beta + H^2\dot{\beta})\vec{X}_{23} + md^2\dot{\alpha}\vec{Y}_{12} + mH^2\dot{\alpha} \cos \beta \vec{Y}_3 + mdH\dot{\beta}\vec{Z}_3$$

$$\bar{\sigma}_C(2/1) = I_2\dot{\alpha}\vec{Y}_{12}$$

Le point C étant fixe dans (1), le moment dynamique en (C, \vec{Y}_{12}) de Σ dans son mouvement par rapport à (1) se détermine par :

$$\bar{\delta}_C(\Sigma/1) \cdot \vec{Y}_{12} = \bar{\delta}_C(3/1) \cdot \vec{Y}_{12} + \bar{\delta}_C(2/1) \cdot \vec{Y}_{12}$$

$$\text{avec :} \quad \bar{\delta}_C(2/1) \cdot \vec{Y}_{12} = I_2\ddot{\alpha}$$

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_C(3/1) \cdot \vec{Y}_{12} &= \left[\frac{d}{dt} \bar{\sigma}_C(3/1) \right]_1 \cdot \vec{Y}_{12} = \frac{d}{dt} \left[\bar{\sigma}_C(3/1) \cdot \vec{Y}_{12} \right] - \bar{\sigma}_C(3/1) \cdot \frac{d}{dt} \vec{Y}_{12} \Big|_1 \\ &= \frac{d}{dt} \left[\bar{\sigma}_C(3/1) \cdot \vec{Y}_{12} \right] \end{aligned}$$

$$\text{et :} \quad \bar{\sigma}_C(3/1) \cdot \vec{Y}_{12} = md^2\dot{\alpha} + mH^2\dot{\alpha} \cos^2 \beta - mdH\dot{\beta} \sin \beta$$

donc, on trouve :

$$\frac{d}{dt} \left[\bar{\sigma}_C(3/1) \cdot \vec{Y}_{12} \right] = md^2\ddot{\alpha} + mH^2\ddot{\alpha} \cos^2 \beta - 2mH^2\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta \cos \beta - mdH\ddot{\beta} \sin \beta - mdH\dot{\beta}^2 \cos \beta$$

Finalement :

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\delta}_C(\Sigma/1) \cdot \vec{Y}_{12} &= md^2\ddot{\alpha} + mH^2\ddot{\alpha} \cos^2 \beta - 2mH^2\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta \cos \beta - mdH\ddot{\beta} \sin \beta - mdH\dot{\beta}^2 \cos \beta + I_2\ddot{\alpha} \\ &= m \left[d^2 + H^2 \cos^2 \beta \right] \ddot{\alpha} - 2mH^2\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta \cos \beta - mdH\ddot{\beta} \sin \beta - mdH\dot{\beta}^2 \cos \beta + I_2\ddot{\alpha} \end{aligned}}$$

L'expression finale du **TMD** au point C en projection sur \vec{Y}_{12} à l'ensemble Σ dans son mouvement par rapport à (1) fixe dans R_0 , donne :

$$\boxed{m \left[d^2 + H^2 \cos^2 \beta \right] \ddot{\alpha} - 2mH^2\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta \cos \beta - mdH\ddot{\beta} \sin \beta - mdH\dot{\beta}^2 \cos \beta + I_2\ddot{\alpha}} \quad (2)$$

$$= mg \cos \theta_0 (d \cos \alpha + H \cos \beta \sin \alpha) + C_{m1}$$

C- Couplages des deux axes

On identifie facilement les deux termes de couplage entre l'axe **B** (orienté par α) et l'axe **C** (orienté par β) dans les deux équations établies.

$$T_1 = -2mH^2\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta\cos\beta$$

$$T_2 = mdH\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta$$

Dans le cas particulier des régimes harmoniques, on comparerait ces deux termes respectivement par rapport à :

$$m[d^2 + H^2 \cos^2 \beta] \ddot{\alpha} \text{ pour } T_1 ;$$

$$mH^2 \ddot{\beta} \text{ pour } T_2.$$

D- Couple induit sur l'axe 'B Poignet' en mouvement de Raali

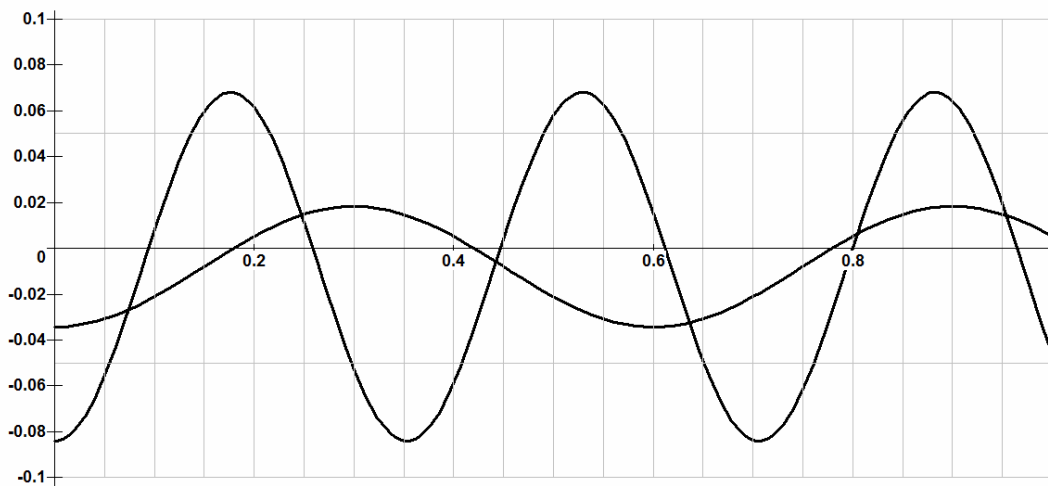
On suppose que la fréquence de rotation de l'axe 'C Baguette' est constante (mouvement de Raali), soit $\dot{\beta} = \omega = \text{cste}$. En agissant sur le couple C_{m1} , on cherche à obtenir que l'axe 'B Poignet' reste immobile, soit $\dot{\alpha} = 0$. On se place dans le cas du bras vertical, soit $\theta_0 = -90^\circ$ et on choisit comme position de référence $\alpha = 0$ (axe 'B Poignet' asservi en position en Raali).

L'équation (2) donne dans ces conditions :

$$C_{m1} = -mdH\omega^2 \cos\beta$$

On peut tracer cette évolution temporelle, ce qui donne

$$d = 2 \text{ cm} ; H = 30 \text{ cm} ; m = 40 \text{ gr} ; \omega = [100, 170] \text{ rpm et } \beta = \omega * t$$



Evolution temporelle du couple axe 'B Poignet' ($C_{m1}(t)$ en Nm) en Raali pour deux valeurs de ω (100 rpm et 170 rpm)

Cette étude dynamique permet de justifier la forme du signal de perturbation de l'axe 'B Poignet' lors du mouvement de Raali : $C_{\text{pert}} = C_0 \cos(\dot{\beta} * t)$ (cf. schéma-bloc du TP4).