

PCSI

AUTOMATIQUE

A) PRÉSENTATION

1. DÉFINITION

L'automatique est l'art d'**analyser**, de **modéliser** puis de **commander** les systèmes. C'est aussi celui de **traiter l'information** et de **prendre des décisions**.

2. DIVERS AUTOMATISMES - EXEMPLES

Les domaines d'application de l'automatique sont aussi nombreux que variés : mécanique, électromécanique, électronique, thermique, biotechnologie, spatial, industries de transformation, économie, etc.

En fonction des différents types d'application, des niveaux de performances souhaités, des critères économiques, etc., on est amené à distinguer et à concevoir divers types d'automatismes dont les principes reposent sur des concepts et des technologies spécifiques. On distingue principalement :

- les **systèmes logiques combinatoires et séquentiels** ;
- les **systèmes asservis**.

■ Les systèmes logiques combinatoires et séquentiels

Câblés ou programmés, leur automatisation repose sur un nombre fini d'opérations prédéterminées dans leur déroulement.

EXEMPLES – Commande d'ouverture de portail, poste de conditionnement de produits, etc.

Les variables traitées sont généralement de **type binaire** : portail ouvert, portail fermé, présence du produit, présence du carton, etc.

■ Les systèmes asservis

Fonctionnant en régulation de maintien (régulateurs) ou en poursuite d'une loi de référence (asservissements), ces systèmes prennent en compte en permanence l'observation de leur état pour le modifier, de sorte que le déroulement des opérations qu'ils réalisent ne peut être prédéterminé à l'avance.

EXEMPLES – Pilote automatique de bateau, Chariot filoguidé, etc.

Les variables traitées sont généralement de type analogique : cap suivi, champ magnétique, etc.

■ Systèmes de traitement par lots

Des systèmes complexes peuvent être réalisés par association des systèmes précédents que l'on appelle alors systèmes de traitement par lots.

EXEMPLES – Robot cueilleur de fruits, station de pompage, etc.

Le régulateur de Watt a pour but de maintenir constante la vitesse de rotation d'une turbine à vapeur. La commande d'admission de vapeur dans la turbine est contrôlée par un robinet dont on peut manœuvrer le papillon. Un ensemble mécanique déformable constitué de masselottes et de tringles permet une mesure de la vitesse de rotation par l'effet de force cen-



Fig 2 : Régulateur de Watt

trifuge. Plus la turbine tourne vite, plus les masselottes sont écartées de l'axe. Pour réaliser un asservissement de vitesse il suffit de transmettre mécaniquement une variation de cet écartement en commande de rotation du papillon du robinet. Si la vitesse de rotation est trop faible, l'écartement insuffisant des masselottes engendre une ouverture du papillon d'admission de la vapeur, entraînant une augmentation de la vitesse. Un comportement symétrique a lieu en cas de vitesse trop élevée.

La **seconde époque**, à partir du milieu du XIX^{ème} siècle, est caractérisée par la théorie du bouclage et les applications de l'algèbre de Boole. Les premiers travaux sur le bouclage sont dus à Maxwell (1868), à Routh avec son critère algébrique (1872) et à Hurwitz (1890).

L'étude analytique de la stabilité du régulateur de Watt fut commencée par Maxwell en 1868 et complétée en 1876 par Wichnegradsky. L'étude des systèmes bouclés doit beaucoup à l'approche fréquentielle de Nyquist, Bode, Black, Nichols, Hall, Evans, qui ont laissé leur nom à des représentations et qui ont publié la plupart de leurs résultats à la fin de la seconde guerre mondiale. Les premières implémentations des systèmes de commande à cette époque reposaient sur l'utilisation de dispositifs électroniques à lampes.

La **troisième époque** débute avec les années cinquante. L'apparition de calculateurs numériques révolutionne le monde de l'automatique. La puissance de calcul disponible fait naître les méthodes dites de l'automatique « moderne » ou « avancée ». Parmi les faits marquants on peut citer :

- l'introduction de la représentation d'état, particulièrement bien adaptée à l'utilisation des calculateurs numériques pour l'étude et la commande des systèmes complexes et multivariables (Kalman 1960) ;
- le développement des méthodes d'étude des systèmes non-linéaires (Kockenburger, Cypkin) et des systèmes échantillonnés (Jury, Ragazzini).
- la prise en compte des phénomènes aléatoires dans les théories récentes comme celles de Kalman, de Bucy.

4. BUTS ET MOTIVATION

Un système automatisé permet d'affranchir tout ou partie d'un processus (production, traitement, suivi, contrôle...) de la participation humaine, tant au niveau de la **décision** (partie commande) que de l'**action** (partie opérative).

Les buts recherchés sont multiples : gain de productivité, travail en zone sensible, niveau de précision ou rapidité ou encore nombre de paramètres à analyser trop élevé pour être gérés par une intervention humaine, etc.

5. STRUCTURE D'UN SYSTÈME ASSERVI

5.1. Structure fonctionnelle

Pour constituer un bouclage, il faut réaliser trois opérations essentielles (*fig. 3*) :

- l'**observation** ;
- la **réflexion** ou le **traitement algorithmique** ;
- l'**action**.

EXEMPLE – Régulation du niveau d'eau dans une cuve à fuite. Les trois opérations à effectuer sont les suivantes :

- observation du niveau d'eau dans la cuve ;
- comparaison avec le niveau souhaité ;
- action sur le robinet.

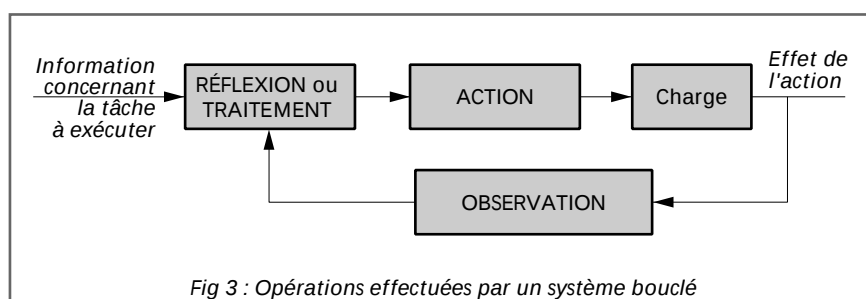


Fig 3 : Opérations effectuées par un système bouclé

5.2. Structure matérielle

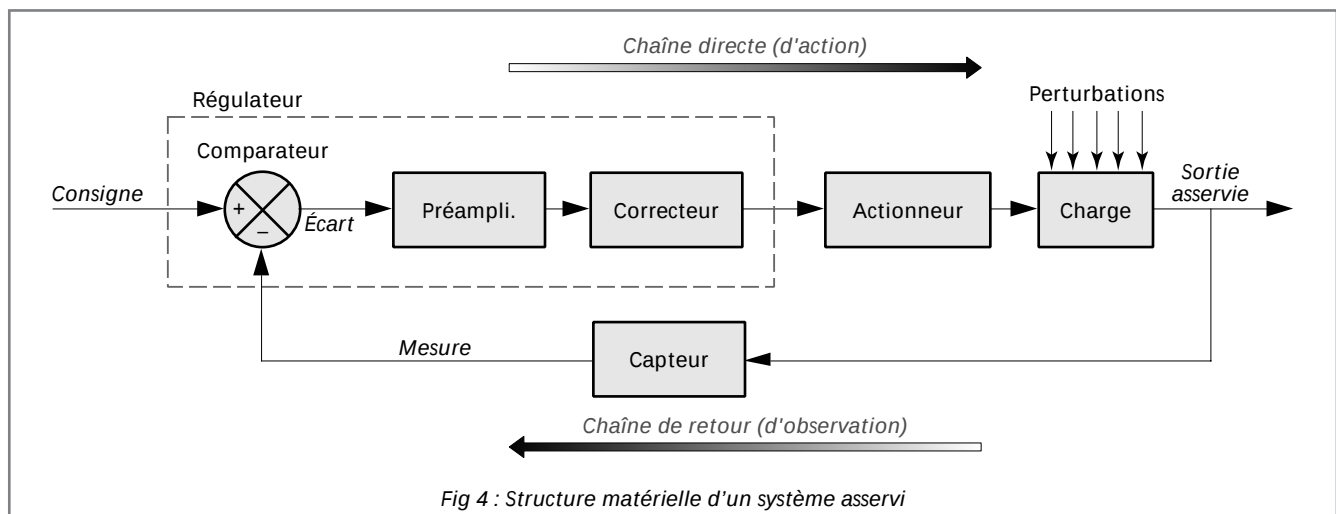
L'organisation fonctionnelle précédente est supportée par une structure matérielle qui comprend (fig. 4) :

- un **actionneur** qui fournit la puissance à la **charge** afin de rendre effective(s) la (les) grandeur(s) de sortie ;
- un **capteur** qui traduit la grandeur à contrôler en signal exploitable. Il informe sur l'état de la (des) grandeur(s) de sortie ;
- un **régulateur** qui élabore un signal de commande à partir de l'écart (ou erreur) entre la consigne et la mesure.

Ce régulateur se compose :

- d'un **comparateur** qui évalue l'écart entre la consigne et la mesure, puis élabore le signal d'erreur ;
- d'un **pré-amplificateur** qui augmente le niveau du signal d'erreur ;
- d'un **correcteur** qui modifie l'allure de la commande pour améliorer les performances globales du système.

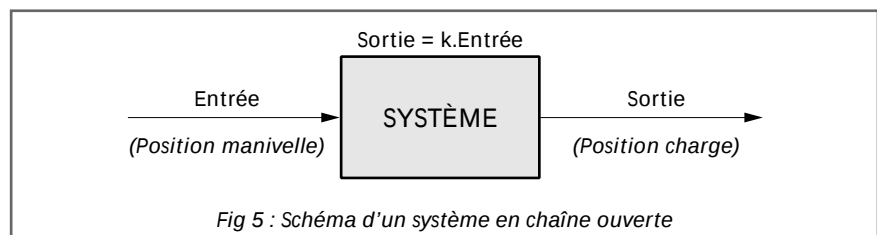
Le schéma de la figure 4, appelé « **schéma-bloc** », met en évidence cette structure qui peut être décomposée en une **chaîne directe** (ou **chaîne d'action**) et une **chaîne retour** (ou **chaîne d'observation**).



5.3. Commande en chaîne ouverte

La notion de commande est assez intuitive, elle peut-être définie par des exemples simples.

Si l'on souhaite déplacer une charge à l'aide d'une manivelle reliée à un réducteur à engrenages, on peut dire que la manivelle commande la position de la charge. Le schéma de la figure 5 symbolise le système correspondant.



REMARQUES

- Aucun contrôle n'est fait au niveau de la position effective de la charge, c'est la position de la manivelle qui est prise comme indicateur de la position supposée de la charge. Les jeux internes au réducteur, l'intervention d'un facteur extérieur venant perturber la position de la charge (coincement,...), l'absence même de charge, sont autant d'éléments qui, avec des influences variables, font que la position attendue de la charge n'est pas effective. La consigne n'est donc pas nécessairement respectée et aucune information retour n'est prévue pour le signaler. Il s'agit d'une **commande en chaîne ouverte**.
- La commande fournit elle-même la puissance au système. On peut modifier le système en utilisant un moteur électrique muni d'un potentiomètre de commande. Ce système se distingue alors du précédent par la présence d'un **amplificateur de puissance** disposé entre la commande et la sortie.

5.4. Bouclage et systèmes asservis

On appelle **bouclage** (ou **rétroaction**) la caractéristique d'un système qui, au cours des opérations qu'il effectue, prend en compte l'observation de son état pour le modifier. Les systèmes correspondants sont appelés **systèmes bouclés** ou **systèmes asservis**.

Un système asservi se distingue par sa capacité à :

- « aligner » en permanence les grandeurs de sortie sur une **consigne** d'entrée variable ou non ;
- réagir à des **perturbations** aléatoires, générées par le système ou son environnement afin de « ré-aligner » les **grandeurs de sortie** sur la **consigne** ;
- amplifier la puissance de la commande.

La **consigne** constitue l'**entrée principale**, les perturbations peuvent être considérées comme **entrées secondaires**. La permanence de l'asservissement est réalisée par application d'une **rétroaction** de la sortie sur l'entrée.

EXEMPLES

- Si un moteur est asservi en vitesse (consigne), sa tension d'alimentation sera systématiquement et constamment ajustée en fonction d'éventuelles surcharges (perturbations).
- Si le cap d'un bateau est asservi en direction (consigne), la position du gouvernail sera systématiquement et constamment ajustée en fonction des influences conjuguées du vent, des courants, de la houle, etc. (perturbations).

6. PERTURBATIONS

Nous avons vu plus haut que, dans un système asservi, les grandeurs physiques de sortie dépendent en permanence des grandeurs d'entrée.

Lorsque les grandeurs de sortie dépendent uniquement et instantanément des grandeurs d'entrée, cette dépendance n'évoluant pas avec le temps, le système est dit « **instantané** ».

Dans la réalité, très peu de systèmes sont instantanés, à cause notamment de l'« inertie » ou « mémoire » (inertie mécanique, inertie thermique). On dit alors que le système est « **dynamique** ». Les grandeurs de sortie dépendent des valeurs présentes et passées des grandeurs d'entrée. Néanmoins, cette mémoire du passé n'est pas infinie et s'atténue de façon exponentielle dans le temps.

Pendant le fonctionnement, le système peut être « **perturbé** » par des modifications des **données d'entrées** qui peuvent être classées en deux types :

- les **grandeurs de commande** du système ;
- les **signaux parasites** agissant directement au niveau de la charge appelés « **perturbations** ».

EXEMPLE – Régulation de la température d'un four

Soit un four dans lequel on veut maintenir une température constante T_c . Pendant le fonctionnement, divers paramètres peuvent varier et donc avoir une influence sur la température intérieure, par exemple :

- la tension d'alimentation du four : $U(t)$;
- la température extérieure du four : $T_{ext}(t)$;
- la variation brutale de la température intérieure due à l'ouverture de la porte : $T_{int}(t)$;
- etc.

On a donc : $T_c = F[U(t), T_{ext}(t), T_{int}(t), \dots]$.

Parmi ces grandeurs, une est considérée comme grandeur de commande ou grandeur d'entrée : $U(t)$. Les autres sont alors considérées comme des perturbations.

REMARQUE – Dans un système qui fonctionne en boucle ouverte, les perturbations ne peuvent pas être prises en compte.

7. RÉGULATION ET ASSERVISSEMENT

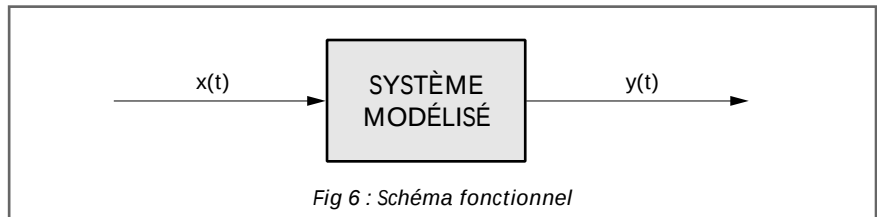
Dans les systèmes asservis, on distinguera essentiellement :

- les systèmes asservis dits **régulateurs** dans lesquels la consigne est constante ou varie par paliers (exemples : régulation de température d'un four, alimentation stabilisée, etc.). De ce fait, les perturbations qui affectent le système peuvent être considérées comme entrées principales.
- les systèmes asservis dits **suiveurs** ou **asservissements** dans lesquels la consigne varie continûment (exemples : table traçante, bras robot, etc.). Leur but est de maintenir à chaque instant l'égalité entre la consigne et la sortie, c'est-à-dire un écart nul.

8. PERFORMANCES

8.1. Signaux canoniques d'entrée

Pour étudier le **comportement** d'un système et analyser ses réactions, il est nécessaire de le modéliser (fig. 6) ainsi que les données d'entrée. Certains signaux d'entrée possèdent des propriétés « intéressantes » vis-à-vis de l'étude du comportement du système. L'interprétation des réponses obtenues permet en particulier d'optimiser les qualités du système : stabilité, rapidité et précision.



La méthode consiste à appliquer des signaux typiques en entrée (appelés **signaux canoniques d'entrée**) et à relever les grandeurs de sortie correspondantes. Les principaux de ces signaux sont décrits ci-dessous.

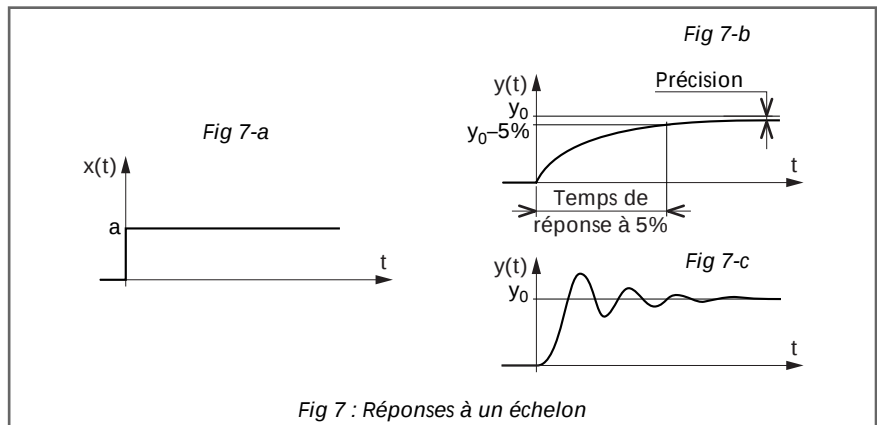
■ Échelon : $x(t) = a U(t)$

$U(t)$ est la fonction échelon unité appelée aussi fonction existence (fig. 7-a).

Les figures 7-b et 7-c représentent deux réponses possibles :

- fig. 7-b : réponse apériodique d'un système du premier ordre ;
- fig. 7-c : réponse oscillatoire amortie d'un système du second ordre.

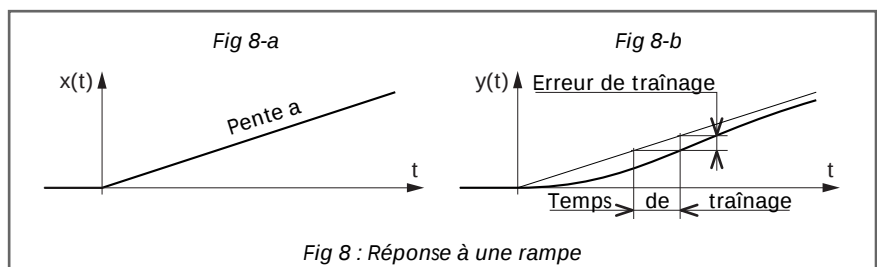
REMARQUE – Sur la figure 7-b, le cas représenté ne produit pas de **dépassement**, c'est-à-dire que la sortie $y(t)$ ne dépasse jamais la valeur y_0 souhaitée : c'est généralement le cas pour les systèmes mécaniques.



■ Rampe : $x(t) = a t U(t)$

Sur la réponse représentée fig. 8-b, on peut mettre en évidence deux caractéristiques importantes : l'**erreur de traînage** (ou **erreur de suivi**) et le **temps de traînage**.

Cet essai permet de valider la capacité du système à suivre une **consigne variable** (fig. 8-a), ce qui se rencontre fréquemment dans les systèmes mécaniques asservis : robots, machines à commande numérique, etc.



Il présente un grand intérêt pratique en terme de sécurité de fonctionnement par la présence d'un seuil d'erreur à ne pas dépasser qui se déclenche si le système a rencontré un obstacle au cours de son mouvement.

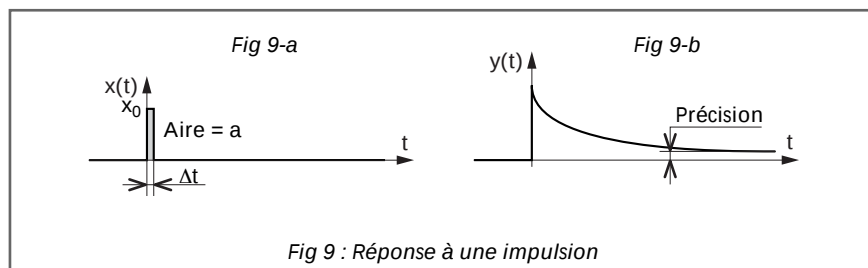
■ Impulsion : $x(t) = a \delta(t)$

$\delta(t)$ est l'impulsion de Dirac (fig. 9-a). En fait, cette impulsion de très faible durée est très difficile à réaliser en pratique ; elle est caractérisée par son aire a .

$$x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} a k \left[U(t) - U(t - \frac{1}{k}) \right]$$

La réponse obtenue s'appelle la **réponse impulsionnelle** (fig. 9-b).

Cet essai est représentatif des réponses à des **perturbations** brèves du fonctionnement du système : chocs, points durs, etc. Il permet d'introduire la notion importante de stabilité.



Les systèmes bouclés présentent en effet une caractéristique particulière : pour certaines configurations de réglage ils peuvent conduire à un comportement instable, c'est-à-dire à s'écarter brusquement et définitivement de leur position à la suite d'une légère perturbation. Ce type de comportement est en fait très dangereux dans la pratique, il faut donc s'en affranchir de manière sûre.

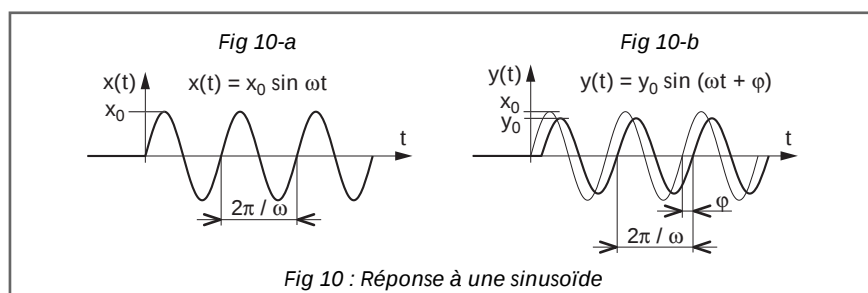
D'une manière générale, plus le coefficient d'amplification de la chaîne directe (gain) est grand plus le danger d'instabilité est fort. On peut donc réduire sa valeur afin de s'éloigner de ce danger potentiel, mais ceci se fera au détriment des autres performances.

■ Sollicitation sinusoïdale : $x(t) = x_0 \sin(\omega t)$

Un signal sinusoïdal (fig. 10-a) est défini par :

- son amplitude x_0 pour le signal $x(t)$;
- sa période T ou sa fréquence $f = \frac{1}{T}$ ou sa pulsation $\omega = 2\pi f$.

La réponse du système à une telle entrée est aussi sinusoïdale et de même période T , par contre l'amplitude de sortie y_0 est différente (fig. 10-b). De plus, la sinusoïde de sortie est décalée (en retard par rapport à celle d'entrée), on dit qu'elle est déphasée. Ce déphasage φ est variable en fonction de la période du signal d'entrée.



Il est assez délicat de solliciter un système mécanique avec une entrée sinusoïdale. Cet essai permet d'étudier sa stabilité et surtout ses marges de stabilité (réserves de stabilité).

8.2. Rapidité, précision, stabilité

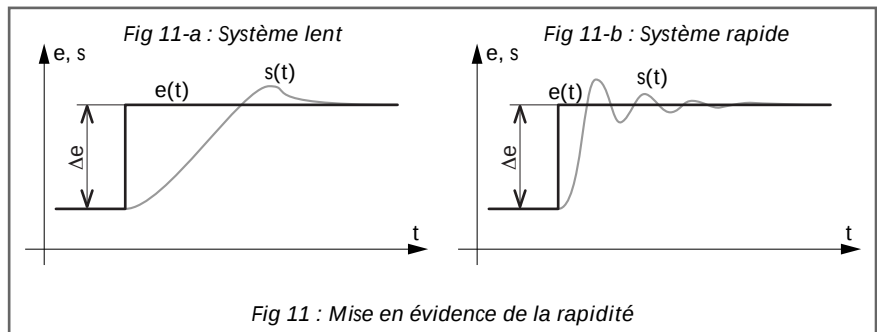
Dans l'étude des systèmes asservis, deux aspects du fonctionnement peuvent être mis en évidence :

- l'**aspect statique** qui concerne l'étude des systèmes asservis en régime permanent (entrée fixe) ;
- l'**aspect dynamique** qui concerne l'étude des systèmes asservis en régime transitoire suite soit à une variation de la consigne, soit à l'apparition d'une perturbation dans la chaîne.

L'aspect dynamique, essentiel en automatique, s'étudie au travers des notions telles que la rapidité, la précision et la stabilité.

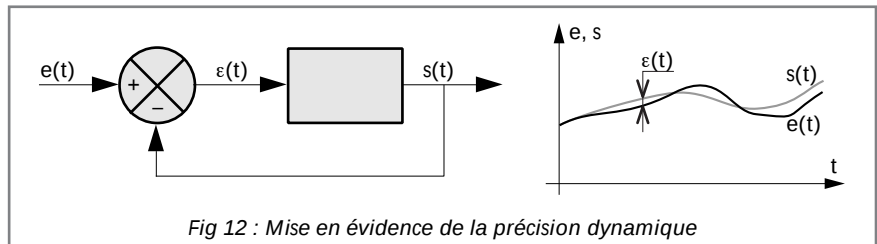
■ Rapidité

C'est la qualité du système qui lui permet « d'aligner » la grandeur de sortie $s(t)$ sur la consigne d'entrée $e(t)$ dans un temps bref. Le temps de réponse constitue la **phase transitoire** de l'asservissement. L'**amortissement** associé à cette phase transitoire constitue également une grandeur représentative de la qualité du système asservi (fig. 11-a et 11-b).



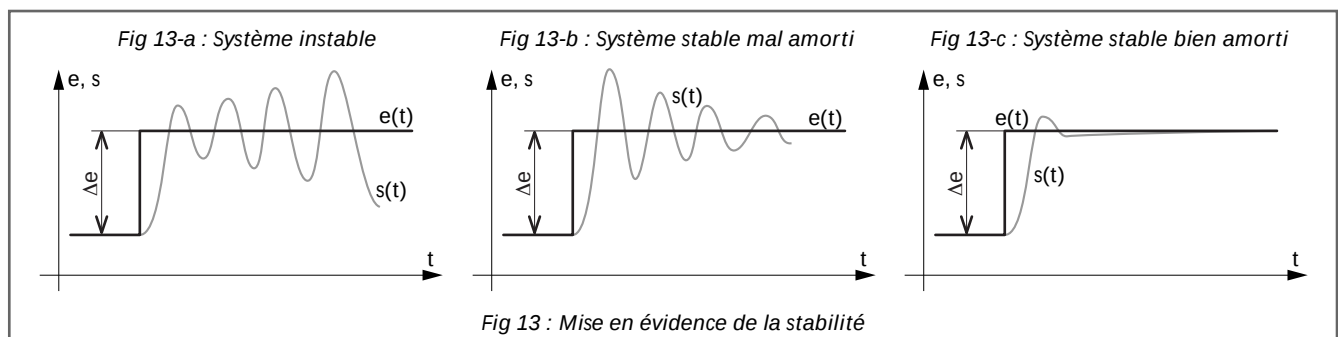
■ Précision dynamique

C'est la qualité du système qui lui permet « d'aligner » le niveau de la grandeur de sortie $s(t)$ sur la consigne d'entrée $e(t)$ avec une marge d'erreur $\varepsilon(t)$ faible (fig. 12).



■ Stabilité

C'est la qualité du système qui consiste à « ré-aligner » systématiquement la grandeur de sortie sur la consigne quelles que soient les modifications de consigne ou/et les perturbations reçues. La phase stable constitue le **régime permanent** de l'asservissement.



DÉFINITION – Un système est stable si, lorsqu'il est écarté d'une position d'équilibre par une cause passagère, il reprend sa position de départ quand cette cause disparaît.

En pratique, il s'avère que ces qualités sont **incompatibles** entre elles. En particulier, si la recherche d'une précision élevée s'accommode parfaitement d'un temps de réponse faible, elle conduit à diminuer la marge de stabilité.

En dehors de cas très particuliers, il s'agira donc la plupart du temps d'optimiser l'asservissement de façon à obtenir un **compromis rapidité-précision / stabilité** avec une marge de stabilité « satisfaisante ».

L'étude d'un système asservi consistera en l'optimisation de ces qualités par rapport aux ordres de priorité et aux niveaux des fonctions à réaliser.

B) MODÉLISATION ET COMPORTEMENT DES SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS ET INVARIANTS

1. SYSTÈMES LINÉAIRES, CONTINUS ET INVARIANTS

1.1. Notions de systèmes dynamiques continus

Nous avons vu que dans un système asservi, les grandeurs de sortie $y(t)$ dépendent en permanence des valeurs présentes et passées des grandeurs d'entrée $x(t)$ (fig. 14).

L'application, en entrée, d'un signal de nature connue (signal échelon, signal rampe, etc.) permet de voir comment se comporte dynamiquement le système. Ce signal étant de nature analogique, on dit alors que l'on a à faire à un **système dynamique continu**.

Si l'on connaît parfaitement la nature même des constituants qui composent le système, de même que les lois physiques qui régissent leurs entrées et leurs sorties, on peut, dans ce cas, mettre le système en équation et étudier son comportement : on dit alors que l'on étudie le système suivant un **modèle de connaissance**.

Si l'on ne connaît pas parfaitement la nature des constituants qui composent le système, on le soumet alors à des sollicitations d'entrée connues (échelon, rampe, impulsion, etc.) et on observe son comportement en sortie. Ce comportement suit en général une loi connue pré-établie : on dit alors que l'on étudie le système suivant un **modèle de comportement** et on réalise ainsi une **identification expérimentale**.

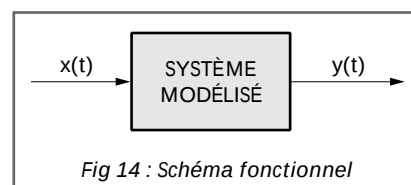


Fig 14 : Schéma fonctionnel

1.2. Système linéaire continu et invariant

Par définition, un système asservi sera dit :

- **linéaire**, si les relations entre les grandeurs d'entrée et de sortie peuvent se mettre sous la forme d'un ensemble d'équations différentielles linéaires à coefficients constants. Toutefois, si le système n'est pas linéaire, il est souvent possible de le linéariser pour de petites amplitudes autour d'un point de fonctionnement ;
- **continu**, si tous les éléments constitutifs sont continus (analogiques). La majorité des systèmes échantillonnés (commandés par calculateurs) peuvent-être traités par les modèles continus ;
- **invariant**, si la loi entrée / sortie est indépendante du temps.

1.3. Modélisation par équation différentielle

Dans les modèles de connaissance, il est nécessaire de mettre en évidence les lois qui définissent les grandeurs de sortie en fonction des grandeurs d'entrée. Or, dans les systèmes dynamiques, si l'on met en équation le comportement des parties électriques ou mécaniques, en ce qui concerne les grandeurs d'entrée et de sortie, on débouche systématiquement sur un ensemble d'**équations différentielles**. En effet :

- **en mécanique**, les théorèmes généraux montrent que les accélérations dépendent des forces, mais, ces dernières sont elles-mêmes fonction des vitesses (amortisseurs : frottement fluide) ou des positions (ressorts) ; or, les grandeurs cinématiques, positions, vitesses et accélérations se déduisent les unes des autres par dérivations successives ;
- **pour les circuits électriques**, l'intensité du courant qui traverse une résistance (R) est liée à la tension aux bornes, alors que pour un condensateur (C), l'intensité est liée à la variation de tension, c'est-à-dire à sa dérivée par rapport au temps.

 Pour résoudre un problème de commande, on sera donc amené à résoudre un système d'équations différentielles.

Propriétés de cette représentation

Nous noterons $x(t)$ la grandeur d'entrée correspondant à la consigne et $y(t)$ la grandeur de sortie qui en découle (fig. 14). Les propriétés qui suivent sont directement liées à la linéarité du système.

■ Additivité

- si l'on applique $x_1(t)$ seul, la réponse est $y_1(t)$;
- si l'on applique $x_2(t)$ seul, la réponse est $y_2(t)$;
- alors, si l'on applique $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, la réponse est $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$.

Cette propriété permettra d'étudier la réponse à un ou plusieurs signaux complexes en décomposant ceux-ci en une somme de signaux plus simples à étudier.

■ Proportionnalité

- si l'on applique $x_1(t)$ seul, la réponse est $y_1(t)$;
- alors, si l'on applique $x(t) = k.x_1(t)$, la réponse est $y(t) = k.y_1(t)$.

■ Réponse libre ou réponse forcée

RAPPEL – La solution d'une équation différentielle linéaire avec second membre est la somme de deux contributions : $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$

- $S_1(t)$ est la solution générale de l'équation sans second membre ;
- $S_2(t)$ est la solution particulière de l'équation avec second membre.

$S_1(t)$ est appelée **réponse transitoire** ou **réponse libre** du système. Elle dépend des conditions initiales et des paramètres qui définissent la position stable du système. On vérifie que cette contribution s'annule au bout d'un certain temps : $\lim_{t \rightarrow \infty} [S_1(t)] = 0$.

La théorie des équations différentielles montre qu'il faut rechercher pour la solution particulière $S_2(t)$, une solution de même nature que l'entrée $x(t)$. $S_2(t)$ est la **réponse forcée** ou régime permanent du système.

De ce fait, passé le régime transitoire, le régime permanent est un signal de même nature que celui appliqué à l'entrée. Voici quelques exemples correspondant à des signaux d'entrée fréquemment utilisés :

$x(t) = Cte$	—————→	$S_{\text{régime permanent}} = K Cte$
$x(t) = a t$	—————→	$S_{\text{régime permanent}} = K_1 a t + K_2$
$x(t) = e^{at}$	—————→	$S_{\text{régime permanent}} = K e^{at}$
$x(t) = a \sin \omega t$	—————→	$S_{\text{régime permanent}} = K a \sin (\omega t + \varphi)$

Ces propriétés attendues permettront d'analyser les performances d'un système asservi en lui imposant un type d'entrée $x(t)$ puis en étudiant la réponse réelle $y(t)$ de celui-ci.

EN RÉSUMÉ

- Le régime libre ou transitoire ne dépend que du système et de ses conditions initiales.
- Le régime forcé ou permanent est de même nature que celui appliqué à l'entrée du système.
- Dans les systèmes physiques stables, le régime libre ou transitoire s'annule au bout...d'un certain temps.

Nous avons vu que la loi entrée / sortie d'un système asservi est régie par un ensemble d'équations différentielles. La résolution de ces équations différentielles s'avère généralement très lourde.

La **transformation de Laplace** va permettre de résoudre ces équations en manipulant de simples équations algébriques.

En automatique, cet outil est utilisé de façon permanente, il est donc indispensable d'en connaître la définition et les propriétés afin d'en acquérir la maîtrise.

1.4. Calcul symbolique : transformation de Laplace

Définition

Soit $f(t)$ une fonction de t . On appelle transformée de Laplace de $f(t)$, notée $\mathcal{L}[f(t)]$, la fonction de p telle que :

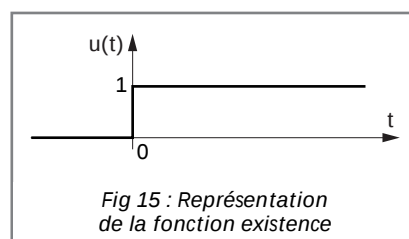
$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

REMARQUES

- p est une variable réelle ou complexe.
- Les valeurs de $f(t)$ pour $t < 0$ n'interviennent pas. On calculera toujours $\mathcal{L}[u(t) f(t)]$ avec $u(t)$ **fonction existence** telle que (fig. 15) :

$$u(t) = 0 \quad \text{pour} \quad t < 0$$

$$u(t) = 1 \quad \text{pour} \quad t \geq 0$$



Exemples de calculs

■ Calcul de $\mathcal{L}[K]$ où K = constante réelle

■ Calcul de $\mathcal{L}[u(t)]$

■ Calcul de $\mathcal{L}[a t]$

■ Calcul de $\mathcal{L}[e^{-a t}]$

Formulaire des transformées usuelles

U(t) f(t)	F(p)
K	$\frac{K}{p}$
K t	$\frac{K}{p^2}$
$e^{-a t}$	$\frac{1}{p + a}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$1 - e^{-t/\tau}$	$\frac{1}{p(1 + \tau p)}$
$e^{a t} t^n$	$\frac{n!}{(p - a)^{n+1}}$

U(t) f(t)	F(p)
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$\text{sh } \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
$\text{ch } \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$
$e^{-a t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p + a)^2 + \omega^2}$
$e^{-a t} \cos \omega t$	$\frac{p + a}{(p + a)^2 + \omega^2}$

Propriétés

$f(t) \Rightarrow L \Rightarrow F(p)$ et $F(p) \Rightarrow L^{-1} \Rightarrow f(t)$	
$a f_1(t) + b f_2(t)$	$a F_1(p) + b F_2(p)$
$f(a t)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$
$e^{-\omega t} f(t)$	$F(p + \omega)$
$\frac{df(t)}{dt}$	$p F(p) - f(0^+)$
$\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$	$p^2 F(p) - p f(0^+) - f'(0^+)$

$f(t) \Rightarrow L \Rightarrow F(p)$ et $F(p) \Rightarrow L^{-1} \Rightarrow f(t)$	
$-t f(t)$	$F'(p)$
$t^2 f(t)$	$F''(p)$
$\int_0^t f(u) du$	$\frac{F(p)}{p}$
$\int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau$	$F(p) G(p)$

■ Théorème de la valeur initiale

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p F(p)$$

■ Théorème de la valeur finale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p F(p)$$

■ Théorème du retard

$$f(t - \tau) \xrightarrow{L} e^{-\tau p} F(p)$$

Applications : résolution d'équations différentielles

RAPPEL – On appelle équation différentielle du second ordre à coefficients constants une équation de la forme $a y'' + b y' + c y = f(x)$ où :

- a , b et c sont des constantes indépendantes du temps ;
- $f(x)$ est une fonction connue, définie et continue dans $\mathcal{R}$;
- y est une fonction inconnue de la variable x , y' et y'' sont ses dérivées première et seconde par rapport à x .

■ Méthode classique

1. **Chercher** des solutions de l'équation différentielle sans second membre à l'aide de l'équation caractéristique (recherche d'intégrales sous la forme $y = e^{rx}$).
2. **Chercher** une équation particulière de l'équation différentielle.
3. L'intégrale générale de l'équation différentielle s'obtient en ajoutant à une **intégrale particulière** de cette équation, l'**intégrale générale de l'équation sans second membre**.
4. **Appliquer** les conditions aux limites pour calculer les constantes d'intégration.

■ Résolution par la transformée de Laplace

1. **Passer** dans le domaine symbolique en exprimant $S(p)$.
2. **Factoriser** le dénominateur dans $\Re$.
3. **Décomposer** en fractions rationnelles.
4. **Identifier et construire** les termes en référence aux transformées de Laplace dans le domaine symbolique.
5. **Retourner** dans le domaine temporel par la transformée de Laplace inverse.

1.5. Représentation par fonction de transfert

■ Définition

La fonction de transfert $H(p)$ (fig. 16), ou transmittance, d'un système est la relation qui, dans le domaine symbolique, traduit la loi sortie / entrée du système, pour des conditions initiales nulles :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

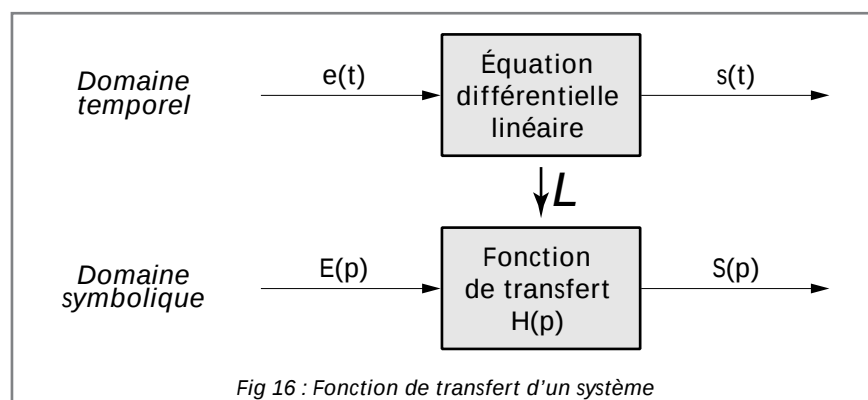


Fig 16 : Fonction de transfert d'un système

REMARQUES

- La fonction de transfert caractérise le système, elle ne dépend pas de l'entrée.
- Si la fonction de transfert d'un système est complètement connue, alors le comportement de celui-ci, par rapport à une entrée donnée, est parfaitement déterminé ;
- L'étude du comportement des systèmes reposera en grande partie sur la recherche de la fonction de transfert $H(p)$. Cette recherche pourra être purement théorique :
 - à partir de l'écriture des équations différentielles et de la transformation de Laplace ;
 - à partir de l'établissement des schémas fonctionnels, ou schémas-blocs (voir § 2).

Elle pourra également être expérimentale, en association avec les signaux canoniques dans le but d'identifier la forme et les coefficients de la fonction de transfert.

■ Expression générale

On notera :

- dans le domaine temporel, $e(t)$ l'entrée d'un système et $s(t)$ sa sortie ;
- dans le domaine symbolique $E(p)$ l'entrée d'un système et $S(p)$ sa sortie.

Un système quelconque d'ordre n pourra s'écrire de la façon générale suivante :

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i e(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j s(t)}{dt^j}$$

Si l'on passe dans le domaine symbolique, la dérivée d'ordre n s'écrit de la façon suivante :

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^n e(t)}{dt^n} \right] = p^n E(p) - p^{n-1} e(0) - \dots - \frac{d^{n-1} e(0)}{dt^{n-1}}$$

Mais, en automatique, c'est l'étude de la réaction à un **stimulus à partir d'un état stable** qui est fondamentale. Aussi, **toutes les conditions initiales seront nulles**.

Dans ces conditions, l'équation générale devient :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i p^i E(p) &= \sum_{i=0}^m b_i p^i S(p) \\ E(p) \sum_{i=0}^n a_i p^i &= S(p) \sum_{i=0}^m b_i p^i \\ H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} &= \frac{\sum_{i=0}^n a_i p^i}{\sum_{i=0}^m b_i p^i} = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m} \end{aligned}$$

De façon plus générale, la **forme canonique polynomiale** fréquemment rencontrée pour la fonction de transfert est la suivante :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{p^\alpha} \frac{N(p)}{D(p)}$$

avec $K = \frac{a_0}{b_0}$,

$$N'(p) = 1 + a'_1 p + a'_2 p^2 + \dots + a'_n p^n$$

$$D'(p) = 1 + b'_1 p + b'_2 p^2 + \dots + b'_m p^m$$

- K est le **gain** de la chaîne directe ;
- α est la **classe** du système, ou encore le nombre d'intégrateurs $\frac{1}{p}$ présents dans la boucle ;
- $N'(p)$ est un polynôme en p de degré n , expression du numérateur ;
- $D'(p)$ est un polynôme en p de degré m , expression du dénominateur ;
- l'**ordre** du système est égal à $(\alpha + m)$. Pour les systèmes mécaniques réels, on a toujours $\alpha + m \geq n$.

Dans le domaine des complexes, la fonction de transfert peut s'écrire sous la forme pôles/zéros :

$$H(p) = \frac{a_n}{b_m} \frac{(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_n)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_m)}$$

Les z_i sont appelés les **zéros** de $H(p)$.

Les p_i sont appelés les **pôles** de $H(p)$.

1.6. Cas particuliers

■ Cas d'un système du premier ordre

Dans le cas particulier d'un système du premier ordre, la fonction de transfert peut fréquemment s'écrire sous la forme suivante :

– Équation différentielle : $b_1 \frac{ds(t)}{dt} + b_0 s(t) = a_0 e(t)$

– Fonction de transfert : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{a_0}{b_0 + b_1 p}$

– Forme canonique de la fonction de transfert : $H(p) = \frac{K}{1 + T p}$

On définit :

– le **gain statique** $H(0)$: $K = \frac{a_0}{b_0}$

– la **constante de temps** : $T = \frac{b_1}{b_0}$

■ Cas d'un système du second ordre

Dans le cas particulier d'un système du second ordre, la fonction de transfert peut fréquemment s'écrire sous la forme suivante :

– Équation différentielle : $b_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + b_1 \frac{ds(t)}{dt} + b_0 s(t) = a_0 e(t)$

– Fonction de transfert : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{a_0}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2}$

– Forme canonique de la fonction de transfert : $H(p) = \frac{K}{1 + 2z \frac{p}{\omega_n} + \frac{p^2}{\omega_n^2}}$

On définit :

– le gain statique $H(0)$: $K = \frac{a_0}{b_0}$

– la fréquence propre non amortie : $\omega_n = \sqrt{\frac{b_0}{b_2}}$

– le facteur d'amortissement (ou coefficient d'amortissement réduit) : $z = \frac{b_1}{2\sqrt{b_0 b_2}}$

■ Cas de l'intégrateur

– Équation : $s(t) = \int e(t) dt$

– Transformée de Laplace : $S(p) = \frac{1}{p} E(p)$

– Fonction de transfert : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{p}$

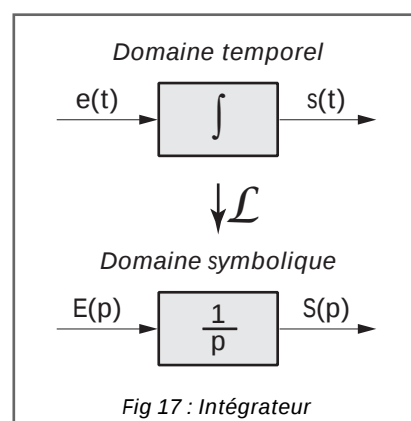
– Représentations : *fig. 17*.

■ Cas du dérivateur

– Équation : $s(t) = \frac{d e(t)}{dt}$

– Transformée de Laplace : $S(p) = p E(p)$

– Fonction de transfert : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = p$



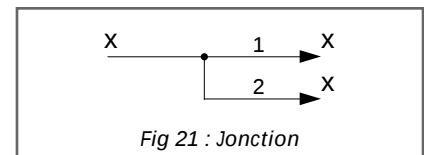
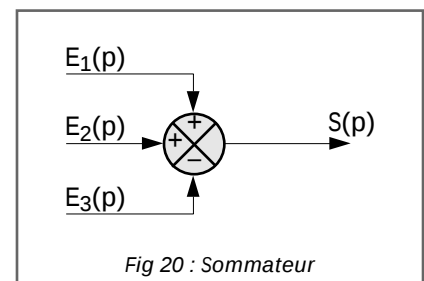
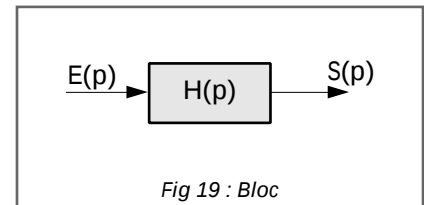
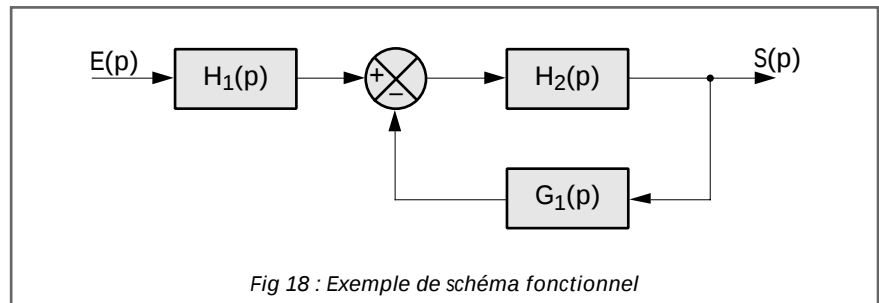
2. REPRÉSENTATION PAR SCHÉMAS-BLOCS

2.1. Définition, formalisme

Construit à partir de la connaissance des diagrammes fonctionnels (structure du système), le schéma-bloc fournit, dans le domaine symbolique, une représentation graphique structurée du fonctionnement d'un système complexe.

Par simplification, il permet d'écrire directement la fonction de transfert globale du système $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$. La représentation (fig. 18) et le formalisme en sont les suivants :

- les branches "véhiculent" les variables ;
- les blocs représentent les fonctions de transfert ;
- les sommateurs additionnent algébriquement les variables ;
- les jonctions servent à prélever les valeurs des variables ;
- $E(p)$ désigne l'entrée symbolique ;
- $S(p)$ désigne la sortie symbolique ;
- $H_i(p)$ désignent les fonction de transferts dans le sens entrée $\rightarrow$ sortie ;
- $G_i(p)$ désignent les fonction de transferts dans le sens sortie $\rightarrow$ entrée.



■ Les blocs

Ils possèdent une entrée et une sortie. Il est à noter que les flèches sont toujours orientées de l'entrée vers la sortie (fig. 19).

■ Les sommateurs

Ils sont multi-entrées mais ne possèdent qu'une sortie (fig. 20). Les entrées sont affectées du signe « plus » pour une entrée positive et du signe « moins » pour une entrée négative.

■ La jonction

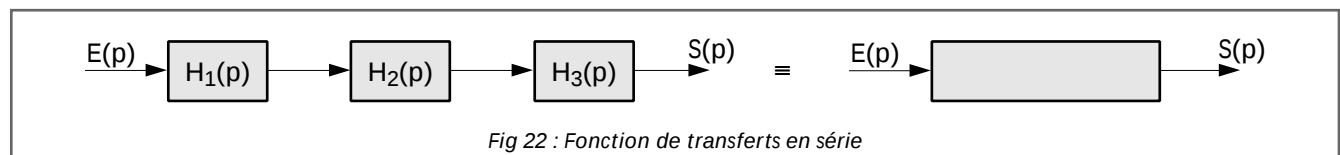
La valeur du signal dans la branche de prélèvement 2 est la même que dans la branche 1 (fig. 21). Le prélèvement n'affecte pas le signal d'origine.

2.2. Transformation et réduction de schémas-blocs

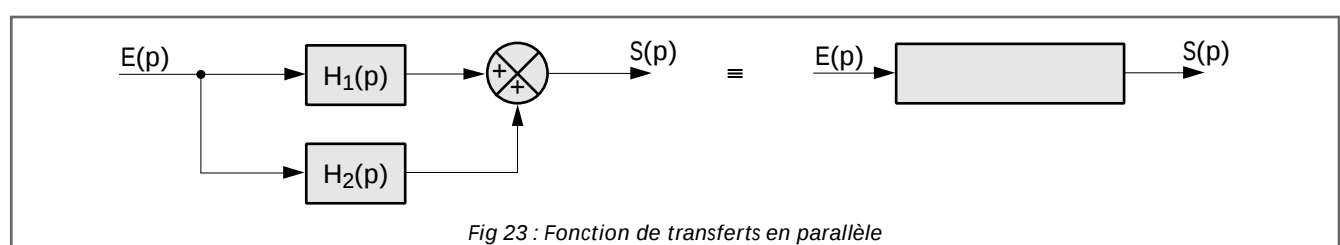
Dans le but de déterminer la fonction de transfert globale d'un système à partir du schéma-bloc, il est nécessaire de "réduire" celui-ci. La réduction fait appel à un certain nombre de transformations qui reposent sur les règles de manipulation des diagrammes fonctionnels.

■ Structure en chaîne directe

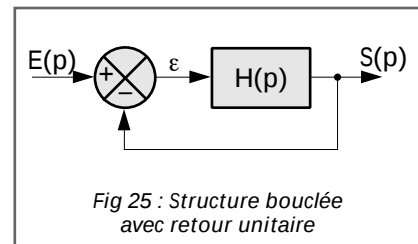
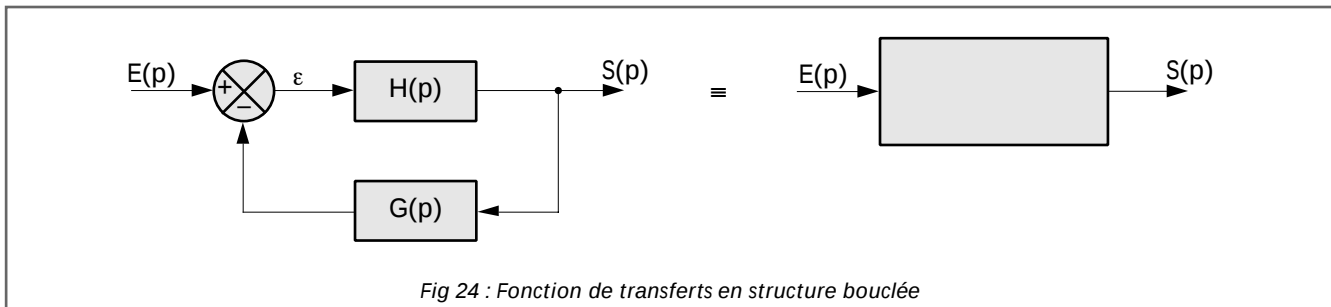
Fonction de transferts en série



Fonction de transferts en parallèle

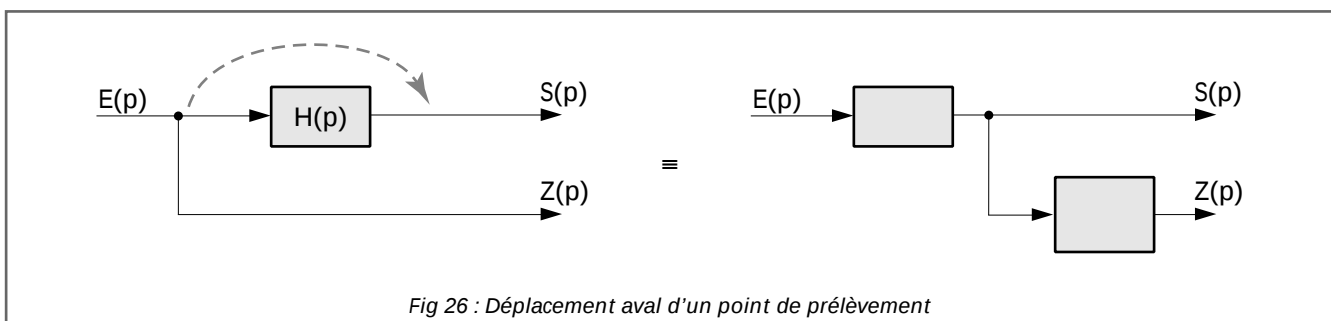


■ Structure bouclée

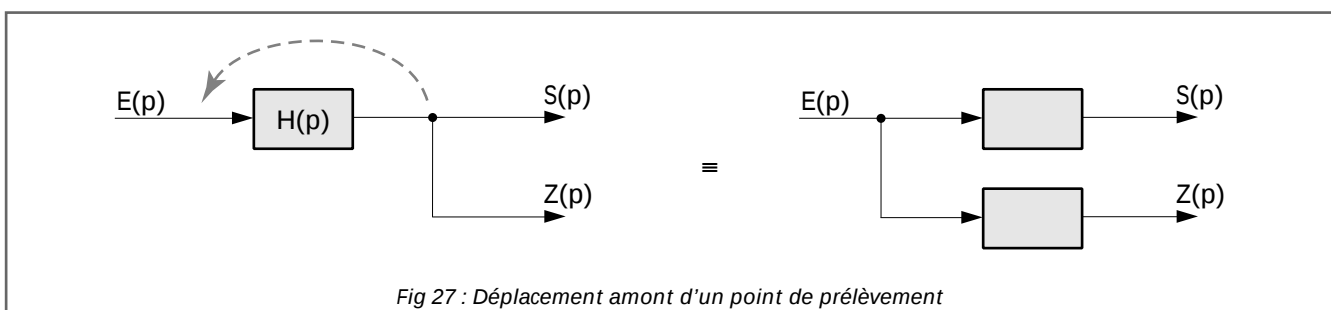


■ Déplacement des points de prélèvement

Déplacement aval

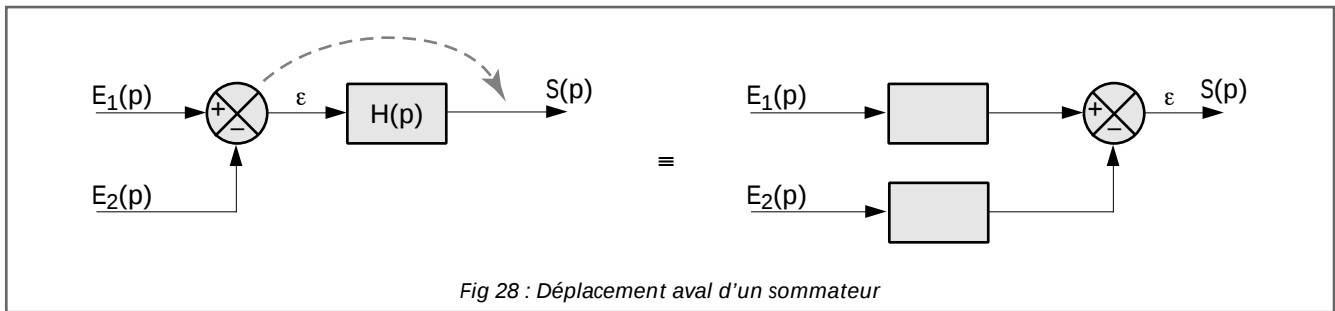


Déplacement amont

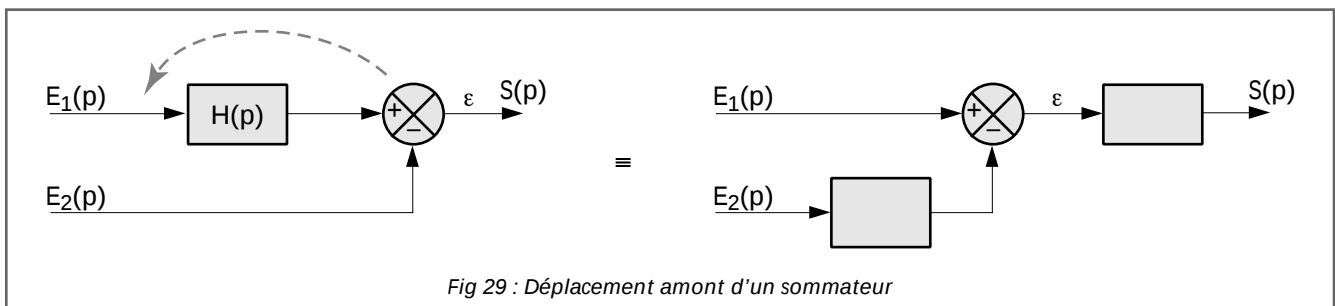


■ Déplacement des sommateurs

Déplacement aval



Déplacement amont



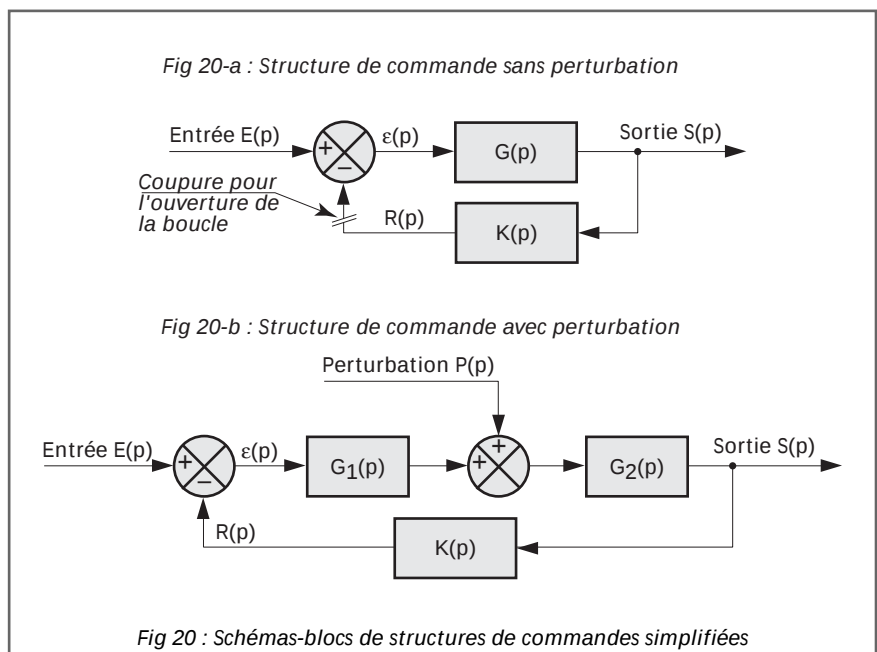
2.3. Fonction de transfert en boucle ouverte et fonction de transfert en boucle fermée

Par simplification des structures présentées, on peut toujours ramener les schémas physiques aux deux schémas équivalents de la figure 30, l'un sans perturbation (fig. 30-a), l'autre avec perturbation dans la chaîne directe (fig. 30-b).

■ Fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) sans perturbation

On considère que la boucle de retour est coupée comme l'indique la figure 20-a.

La fonction de transfert en boucle ouverte est le rapport de la transformée de Laplace du signal de retour $R(p)$ à celle de l'erreur $\varepsilon(p)$. On la note :



$$FTBO(p) = \frac{R(p)}{\varepsilon(p)} = G(p) K(p)$$

■ Fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) sans perturbation

C'est le rapport des transformées de Laplace du signal de sortie $S(p)$ à celle de la consigne d'entrée $E(p)$. On la note :

$$FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{G(p)}{1 + G(p)K(p)}$$

■ Relation entre FTBO et FTBF sans perturbation et avec retour unitaire

Si la boucle de retour est unitaire ($K(p) = 1$), on a :

$$FTBO(p) = G(p) \quad \text{et} \quad FTBF(p) = \frac{FTBO(p)}{1 + FTBO(p)}$$

REMARQUE – Si $FTBO(p)$ est grand devant 1, on constate que $FTBF(p)$ est sensiblement égal à 1, ce qui traduit le fait que la sortie suit la valeur de la consigne d'entrée.

2.4. Élaboration des diagrammes fonctionnels

La méthode consiste, à partir des schémas technologique ou structurel du système proposé, à répertorier toutes les grandeurs présentes dans le fonctionnement du système (variables d'entrée(s), de sortie et variables internes), à écrire les équations reliant toutes les variables, afin d'établir, avec l'aide des fonctions de transfert élémentaires, le schéma bloc.

Pour cela, différentes étapes sont à respecter.

Étapes d'élaboration des diagrammes fonctionnels

■ 1ère étape

À partir du schéma de réalisation proposé (schéma technologique), **définir la (ou les) grandeur(s) de sortie $s(t)$** du système asservi, c'est-à-dire la grandeur asservie.

■ 2ème étape

À partir du schéma de réalisation proposé (schéma technologique), **définir la grandeur d'entrée $e(t)$** du système asservi (en général, c'est la grandeur d'entrée de l'organe d'affichage de la consigne).

■ 3ème étape

Écrire, dans le domaine temporel, **les équations** électriques, mécaniques, électromécaniques, hydrauliques, pneumatiques, etc., régissant le fonctionnement des différents organes du système.

■ 4ème étape

Identifier la grandeur de commande si elle est de nature différente de celle de la grandeur d'entrée.

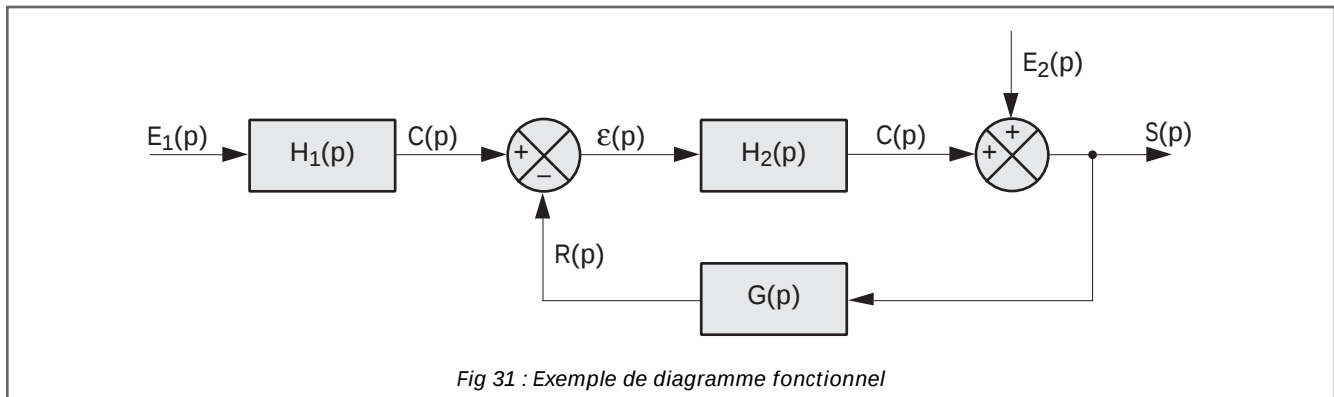
Identifier la grandeur de retour qui doit être de même nature que la grandeur de commande.

■ 5ème étape

Faire apparaître le signal d'erreur dans les équations écrites à la 3ème étape.

■ 6ème étape

À partir des équations écrites à la 3ème étape, et éventuellement à l'aide d'un tableau donnant les fonctions de transfert de base, **réaliser le schéma-bloc**.

EXEMPLE – Figure 31

■ Cas de diagrammes à plusieurs entrées

Pour déterminer la fonction de transfert d'un système qui possède plusieurs entrées (fig. 31), on applique le théorème de la superposition :

$$S(p) = H_{gl1}(p) E_1(p) + H_{gl2}(p) E_2(p)$$

où $H_{gl1}(p)$ représente la fonction de transfert du système sous la seule entrée $E_1(p)$ (soit $E_2(p) = 0$)

et $H_{gl2}(p)$ représente la fonction de transfert du système sous la seule entrée $E_2(p)$ (soit $E_1(p) = 0$).

3. SIGNAUX CANONIQUES D'ENTRÉE

3.1. Réponse temporelle, rapidité

Les conditions initiales étant fixées, la **réponse d'un système** correspond à l'évolution de sa sortie lorsque son entrée est soumise à un signal donné.

■ Analyse temporelle et réponse temporelle

L'**analyse temporelle** d'un système consiste à étudier son comportement, en fonction du temps, suite à une entrée canonique. On appelle alors **réponse temporelle** l'expression de sa sortie en fonction du temps.

■ Réponse indicielle

On appelle **réponse indicielle**, le signal de sortie en réponse à un **échelon d'entrée**. Suivant la forme de cette réponse, on définit les paramètres caractéristiques suivants :

- le temps d'établissement ;
- le dépassement ;
- le retard.

■ Temps d'établissement et rapidité

Si la réponse à un échelon unité tend vers une valeur finie, on note K cette valeur appelée **gain statique** et on a : $K = \lim_{t \rightarrow \infty} s(t)$.

Pour qualifier la durée du régime transitoire, on définit le **temps d'établissement t_e à 5%** comme le temps à partir duquel : $\frac{|s(t) - K|}{K} < 5\%$ (fig. 32).

Le temps d'établissement caractérise la **rapidité** du système.

■ Dépassement

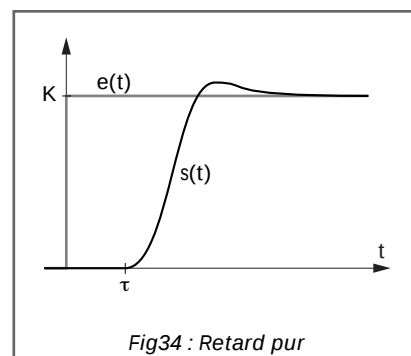
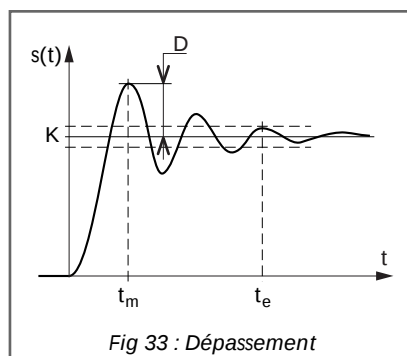
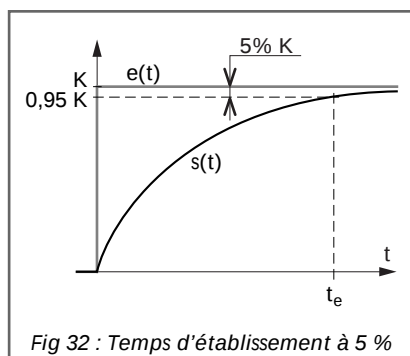
Lorsque la réponse à un échelon dépasse temporairement sa valeur finale de la quantité D , on appelle **dépassement** le rapport $\frac{D}{K}$ (fig. 33). On l'exprime en % de K .

Une réponse indicielle sans dépassement est dite **apériodique**.

La quantité t_m est définie comme l'instant du premier maximum.

■ Retard

Lorsqu'un système est retardé, l'influence de l'entrée ne se fait sentir qu'après un temps τ appelé **retard pur** (fig. 34). La fonction de transfert des systèmes retardés fait apparaître le terme $e^{-\tau p}$ en facteur au numérateur.



3.1.1. Réponses temporelles d'un système du 1^{er} ordre

■ Expression temporelle

$$T s'(t) + s(t) = K e(t)$$

■ Fonction de transfert

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + T p}$$

avec $K = H(0)$ = gain statique ;

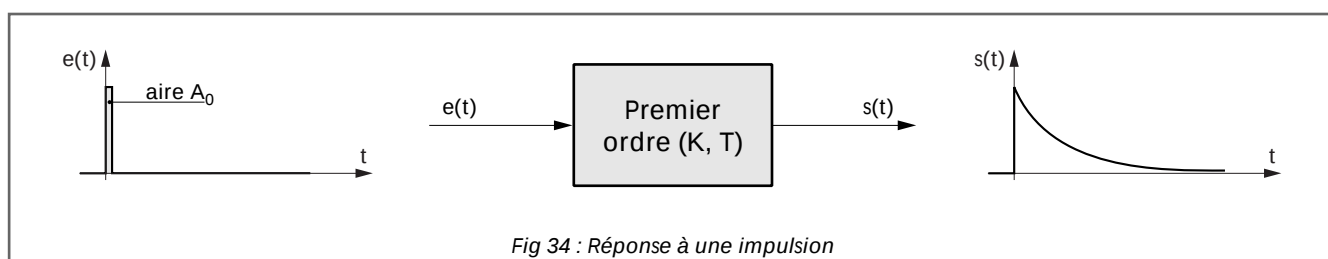
T = constante de temps.

■ Réponse à une impulsion

L'entrée est de la forme : $e(t) = A_0 \delta(t)$ avec $\delta(t)$ = impulsion de Dirac.

L'expression symbolique de la sortie est : $S(p) = \frac{K A_0}{1 + T p}$.

La réponse est de la forme (fig. 35) : $s(t) = \frac{K A_0}{T} e^{-\frac{t}{T}}$.



La figure 36 donne les caractéristiques de cette réponse. On peut remarquer que :

- la réponse impulsionnelle du système est également une impulsion ;
- la tangente à l'origine passe par le point de coordonnées $(T, 0)$;
- au bout d'un temps T , la réponse atteint 37 % de sa valeur permanente $\frac{K A_0}{T}$;
- au bout d'un temps $3T$, la réponse atteint 5 % de sa valeur permanente $\frac{K A_0}{T}$;
- la valeur finale de régime permanent ($t \rightarrow \infty$) tend vers 0.

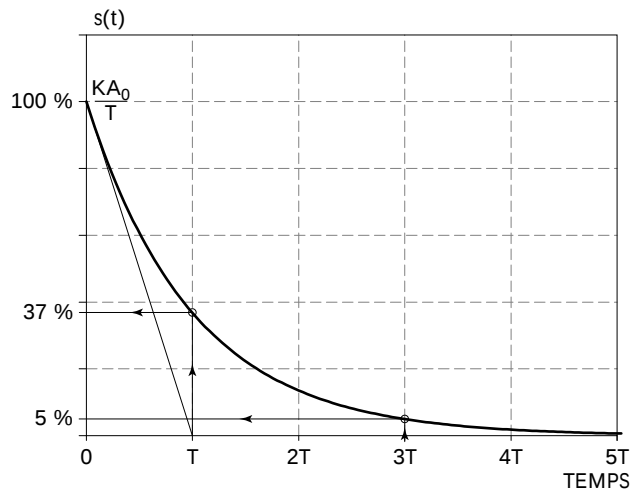


Fig 36 : Réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre

■ Réponse à un échelon

L'entrée est de la forme : $e(t) = e_0 u(t)$ avec $u(t)$ = fonction existence.

L'expression symbolique de la sortie est : $S(p) = \frac{K e_0}{p(1 + T p)}$.

La réponse est de la forme (fig. 37) : $s(t) = K e_0 (1 - e^{-\frac{t}{T}})$.



Fig 37 : Réponse à un échelon

La figure 38 donne les caractéristiques de cette réponse. On peut remarquer que :

- la tangente à l'origine passe par le point de coordonnées $(T, 100 \% K e_0)$;
- au bout d'un temps T , la réponse atteint 63 % de sa valeur permanente $K e_0$;
- au bout d'un temps $3T$, la réponse atteint 95 % de sa valeur permanente $K e_0$;
- la valeur finale de régime permanent ($t \rightarrow \infty$) tend vers $K e_0$.

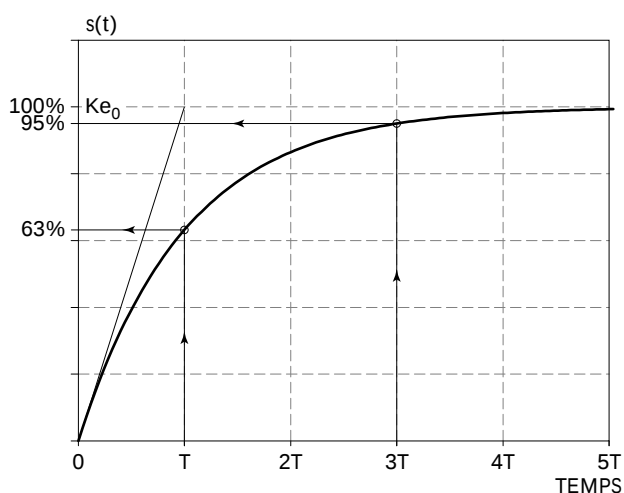


Fig 38 : Réponse à un échelon d'un système du premier ordre

■ Réponse à une rampe

L'entrée est de la forme : $e(t) = a t u(t)$ avec $u(t)$ = fonction existence.

L'expression symbolique de la sortie est : $S(p) = \frac{K a}{p^2(1 + T p)}$.

La réponse est de la forme (fig. 39) : $s(t) = K a \left(t - T - T e^{-\frac{t}{T}} \right)$.

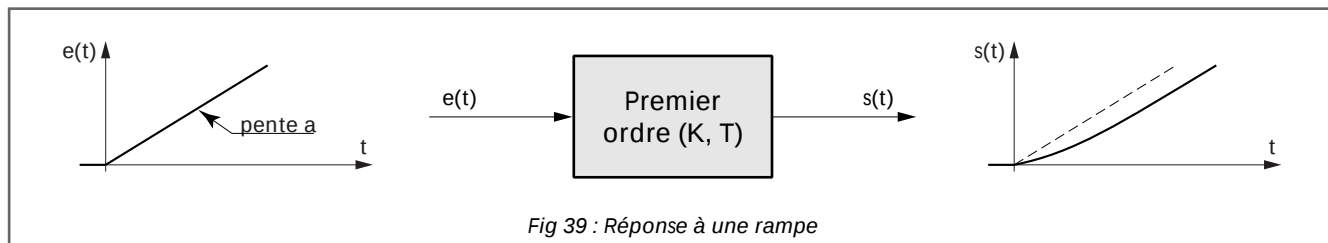


Fig 39 : Réponse à une rampe

La figure 40 donne les caractéristiques de cette réponse. On peut remarquer que :

- à partir d'un temps $t = 4T$, le terme $T e^{-\frac{t}{T}}$ est pratiquement nul ;
- la réponse, qui est alors $s(t) = K a (t - T)$, est aussi une rampe mais retardée de T . Pour un système sans inertie, on aurait $T = 0$;
- l'erreur de traînage $\varepsilon_T = K a T$, pour un système donné, est d'autant plus grande que la pente a du signal d'entrée est importante ;
- la tangente à l'origine est nulle ;
- la notion de temps d'établissement t_e n'a plus de sens.

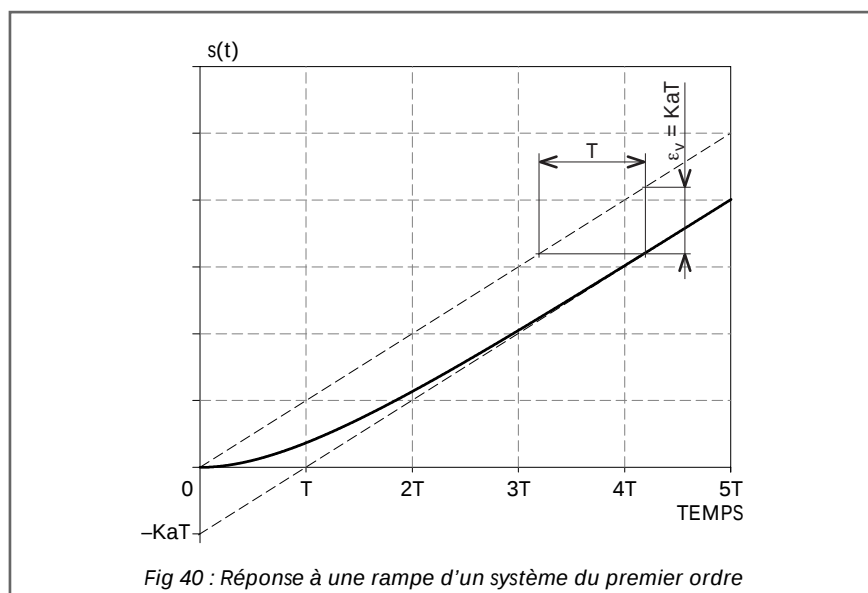


Fig 40 : Réponse à une rampe d'un système du premier ordre

3.1.2. Réponses temporelles d'un système du 2nd ordre

■ Expression temporelle

$$b_2 s''(t) + b_1 s'(t) + b_0 s(t) = a_0 e(t)$$

■ Fonction de transfert

$$H(p) = \frac{K}{1 + 2z \frac{p}{\omega_n} + \frac{p^2}{\omega_n^2}}$$

avec $K = H(0)$ = gain statique ;

z = facteur d'amortissement ;

ω_n = pulsation propre non amortie.

■ Réponse à un échelon

L'entrée est de la forme : $e(t) = e_0 u(t)$ avec $u(t)$ = fonction existence.

L'expression symbolique de la sortie est : $S(p) = \frac{1}{p} \frac{K e_0}{1 + 2z \frac{p}{\omega_n} + \frac{p^2}{\omega_n^2}} = \frac{K e_0 \omega_n^2}{p (p^2 + 2z \omega_n p + \omega_n^2)}$.

• En appliquant le théorème de la valeur initiale, on a :

$$s(0^+) = \lim_{p \rightarrow \infty} p S(p) = 0 \text{ et aussi : } \frac{ds}{dt}(0^+) = \lim_{p \rightarrow \infty} (p S(p) - 0) = 0.$$

Ceci traduit le fait que **la tangente à l'origine est horizontale**.

- En appliquant le théorème de la valeur finale, on a :

$$s(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p S(p) = K e_0.$$

Ceci traduit le fait que **le régime permanent ne dépend que du gain statique K**, indépendamment du facteur d'amortissement z et de la pulsation propre non amortie ω_n .

- La forme de la réponse dépend de la valeur des racines de l'équation caractéristique du second degré du dénominateur :

$$p^2 + 2z\omega_n p + \omega_n^2 \text{ dont le discriminant réduit est } \Delta' = (z\omega_n)^2 - \omega_n^2 = \omega_n^2(z^2 - 1).$$

On peut donc distinguer 3 cas.

Cas $z > 1$

Il existe alors deux racines réelles $p_1 = -z\omega_n - \omega_n\sqrt{z^2 - 1}$ et $p_2 = -z\omega_n + \omega_n\sqrt{z^2 - 1}$.

En posant $\tau_1 = -\frac{1}{p_1}$ et $\tau_2 = -\frac{1}{p_2}$, on a alors
$$S(p) = \frac{K e_0}{p(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}.$$

La réponse est de la forme :
$$s(t) = K e_0 \left[1 + \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} (\tau_1 e^{-t/\tau_1} - \tau_2 e^{-t/\tau_2}) \right]$$

La figure 41 donne l'allure de cette réponse pour $z \geq 1$. On peut remarquer qu'il n'y a pas de dépassement.

Cas $z = 1$

Il existe alors une racine double $p = -\omega_n$ et $S(p)$ peut se mettre sous la forme :

$$S(p) = \frac{K e_0}{p(1 + \tau p)^2}.$$

Après décomposition en éléments simples, la réponse est de la forme (fig. 40) :

$$s(t) = K e_0 \left[1 - e^{-t/\tau} - \frac{t}{\tau} e^{-t/\tau} \right]$$

Le cas $z = 1$ sur la figure 40 donne l'allure de cette réponse qui donne une meilleure rapidité que dans les cas précédents.

Cas $z < 1$

Il existe alors deux racines complexes $p = -z\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - z^2}$ et $S(p)$ peut se mettre sous la forme :

$$S(p) = \frac{1}{p} \frac{K e_0 \omega_n^2}{(p + z\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1 - z^2})^2}.$$

Après décomposition en éléments simples, la réponse est de la forme (fig. 42) :

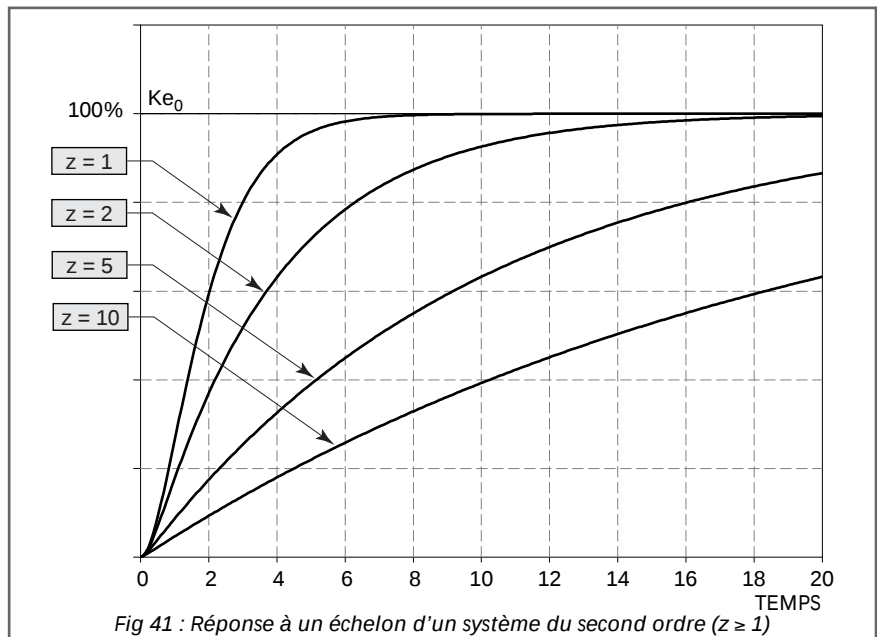


Fig 41 : Réponse à un échelon d'un système du second ordre ($z \geq 1$)

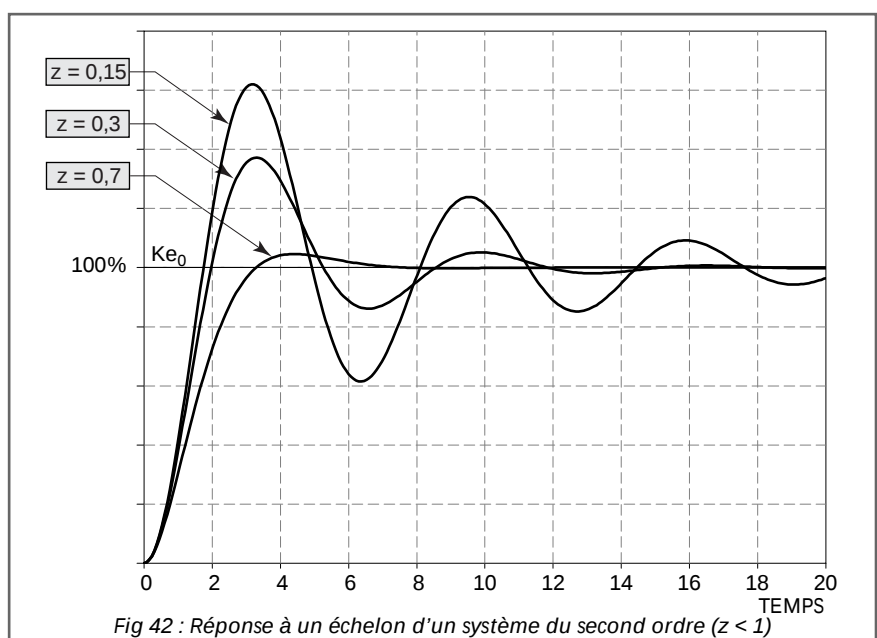


Fig 42 : Réponse à un échelon d'un système du second ordre ($z < 1$)

$$s(t) = K e_0 \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z \omega_n t} \sin \left(\omega_n \sqrt{1-z^2} t + \operatorname{atan} \frac{\sqrt{1-z^2}}{z} \right) \right]$$

La figure 42 donne l'allure de cette réponse pour $z < 1$. On peut remarquer que les dépassements sont d'autant plus grands que z diminue.

CONCLUSIONS

- Les réponses des systèmes du second ordre peuvent présenter des dépassements très importants.
- Le temps de réponse à 5% est le temps au delà duquel la réponse reste comprise entre 95% et 1,05% de la valeur de cette même réponse lorsque $t \rightarrow \infty$. Ce temps varie en fonction de coefficient d'amortissement z :
 - $z \ll 1$: les oscillations sont mal amorties et le temps de réponse peut être très grand ;
 - $z = 0,7$: le dépassement est de 10% mais le temps de réponse à 5% est le plus faible ;
 - $z = 1$: c'est la valeur qui donne le temps de réponse le plus faible sans dépassement ;
 - $z \gg 1$: il n'y a pas de dépassement mais le temps de réponse peut être grand, donc le système est lent.

Caractéristiques des réponses avec dépassement (voir document annexe)

3.2. Réponses fréquentielles

3.2.1. Analyse harmonique et réponse fréquentielle

L'**analyse harmonique** d'un système consiste à étudier son comportement, en fonction du temps, suite à une entrée canonique de type sinusoïdal. On appelle alors **réponse fréquentielle** l'expression de sa sortie en fonction de la **fréquence d'entrée**.

3.2.2. Réponse dans le domaine temporel

L'**analyse harmonique** d'un système consiste à appliquer en entrée, dans le domaine temporel, un signal de type sinusoïdal de la forme **$e(t) = e_0 \sin(\omega t)$** (fig. 43). Si le système est stable, une fois le régime transitoire « éteint », la **réponse temporelle** permanente est une sinusoïde de même pulsation ω , d'amplitude s_0 différente de e_0 et déphasée d'un angle φ .

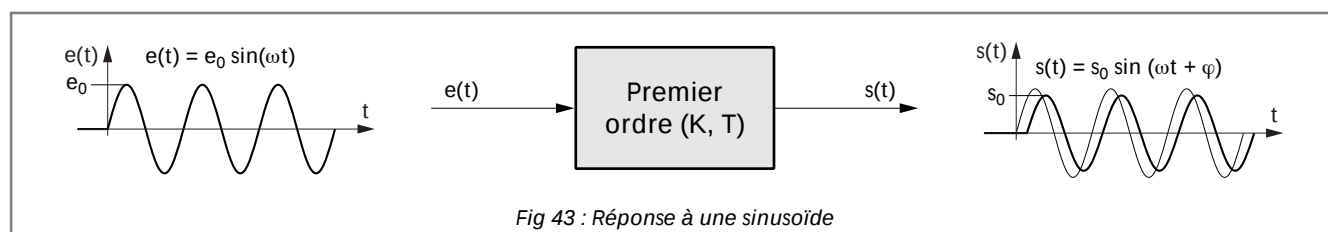


Fig 43 : Réponse à une sinusoïde

3.2.3. Réponse dans le domaine symbolique

Dans le domaine symbolique, si **$H(p)$** représente la **fonction de transfert** du système, alors la fonction complexe **$H(j\omega)$** est appelée **fonction de transfert complexe** du système.

On montre qu'en régime établi, la sortie est $s(t) = e_0 |H(j\omega)| \sin \{ \omega t + \arg[H(j\omega)] \}$.

Elle a respectivement pour phase l'argument de $H(j\omega)$ et pour amplitude, l'amplitude de $e(t)$ multipliée par le module de $H(j\omega)$. La fonction de transfert complexe est donc représentative de la réponse temporelle $s(t)$.

3.2.4. Représentation de la fonction de transfert : lieux de transfert

La fonction $H(j\omega)$, pour ω variant sur l'intervalle $]0, +\infty[$, peut être représentée graphiquement : c'est ce qu'on appelle le **lieu de transfert**.

Les lieux de transfert peuvent être représentés de trois manières différentes, chacune présentant des avantages différents : ces représentations sont celles de **Bode**, de **Nyquist** et de **Black-Nichols**.

■ Notations

On notera :

- $G(\omega)$ la quantité $G(\omega) = |H(j\omega)|$, module de $H(j\omega)$;
- $G_{dB}(\omega)$ la quantité $G_{dB}(\omega) = 20 \log[G(\omega)]$ exprimée en décibel (dB). Dans cette expression, la fonction $\log$ représente la fonction « logarithme décimal » ;
- $\varphi(\omega)$ la quantité $\varphi(\omega) = \arg[H(j\omega)]$, argument de la fonction $H(j\omega)$ exprimée en degré ;
- $\text{Re}[H(j\omega)]$ la partie réelle de $H(j\omega)$;
- $\text{Im}[H(j\omega)]$ la partie imaginaire de $H(j\omega)$.

■ Représentation de Bode

La représentation de Bode est très utilisée pour traiter les problèmes de stabilité et de marge de stabilité.

Elle se décompose en deux diagrammes utilisant des repères semi-logarithmiques (fig. 44) :

- le **diagramme de gain** qui représente son module exprimé en décibels (dB) en fonction de la pulsation ω :

$$x = \log(\omega)$$

$$y = 20 \log_{10}[|H(j\omega)|] = G_{dB}(\omega)$$

- le **diagramme de phase** qui représente sa phase exprimée en degrés en fonction de la pulsation ω :

$$x = \log(\omega)$$

$$y = \text{Arg}[H(j\omega)] = \varphi(\omega)$$

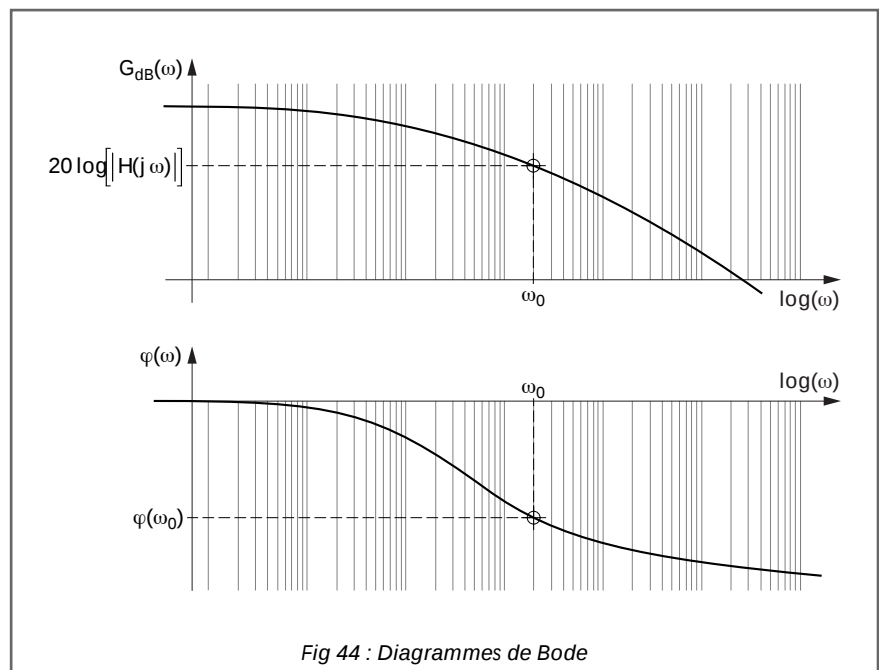


Fig 44 : Diagrammes de Bode

La représentation de Bode possède des propriétés qui en facilite l'utilisation : étant établi que le module d'un produit est égal au produit des modules, que le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes et que l'argument d'un produit est égal à la somme des arguments, on en conclut que l'un des intérêts des diagrammes de Bode réside dans la possibilité de superposition (au sens de l'addition) des diagrammes de fonctions élémentaires afin de reconstituer le diagramme d'une fonction plus complexe.

Afin de réaliser un tracé rapide, on se limite souvent au tracé des asymptotes que l'on appelle alors « tracé asymptotique de Bode ».

REMARQUE – L'exploitation de cette représentation sera privilégiée par rapport aux deux suivantes.

■ Représentation de Nyquist

Pour chaque pulsation ω , $H(j\omega)$ est représenté par un point dont les coordonnées sont sa partie réelle et sa partie imaginaire.

$$x = \text{Re}[H(j\omega)]$$

$$y = \text{Im}[H(j\omega)].$$

Lorsque ω varie de 0 à l' ∞ , ce point décrit une courbe que l'on gradue dans le sens des ω croissants (fig. 45).

Ce lieu est aussi appelé lieu de réponse en fréquence du système. Il est souvent utilisé dans l'étude de la stabilité des systèmes (critères de Nyquist ou du revers).

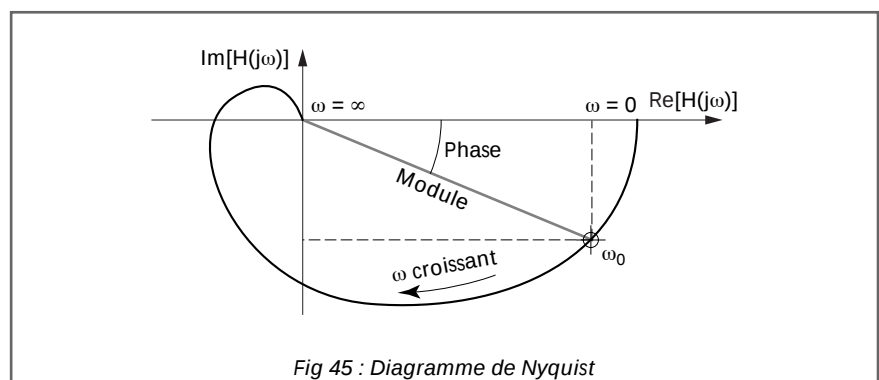


Fig 45 : Diagramme de Nyquist

■ Représentation de Black-Nichols

Cette courbe représente le module de $H(j\omega)$ exprimé en dB en fonction de la phase (fig. 46).

$$x = \text{Arg}[H(j\omega)] \quad y = 20 \log_{10}(|H(j\omega)|).$$

Comme pour le lieu de Nyquist, il est gradué en ω variant de 0 à l' ∞ .

Ce lieu est très utilisé en pratique pour résoudre les problèmes de stabilité par réglage du gain.

De plus, il permet de déduire le lieu de la fonction de transfert en boucle fermée (F.T.B.F.) du lieu de la fonction de transfert en boucle ouverte (F.T.B.O.) pour les systèmes à retour unitaire (cas très fréquents).

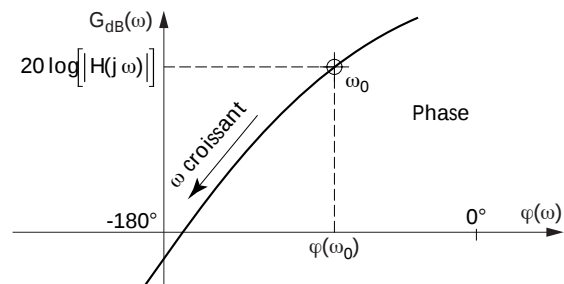


Fig 46 : Diagramme de Black-Nichols