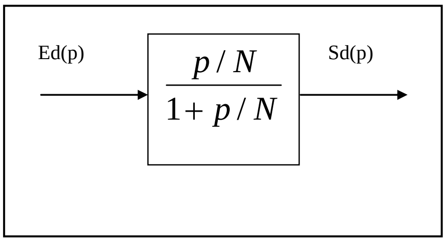
Son équation dans le domaine de Laplace est : S(p) = $\left[Kp + \frac{Ki}{p} + \frac{Kd}{N}\frac{p}{1+\frac{1}{N}p}\right]$. E(p)

Le terme « dérivé filtré » diffère légèrement du dérivé filtré de Matlab, car le coefficient du terme dérivé est Kd/N et non Kd (ceci pour des raisons d'optimisation du calcul numérique).

.

Analysons le terme dérivé seul :



tel que : Sd(p) = $\frac{\frac{p}{N}}{1+\frac{p}{N}}$. Ed(p)

Modifions cette égalité pour ne faire apparaître que des p au numérateur :

$S(p).(N+p) = p.E(p)$;

ou encore :

$N.S(p) + p.S(p) = p.E(p)$

repassons dans le domaine temporel et

remplaçons la multiplication par p du domaine de Laplace par la dérivation temporelle :

$$N.S(t) + \frac{dS(t)}{dt} = \frac{dE(t)}{dt}$$

intégrons cette égalité entre les deux instants d'échantillonnage : (n-1)Te et nTe :

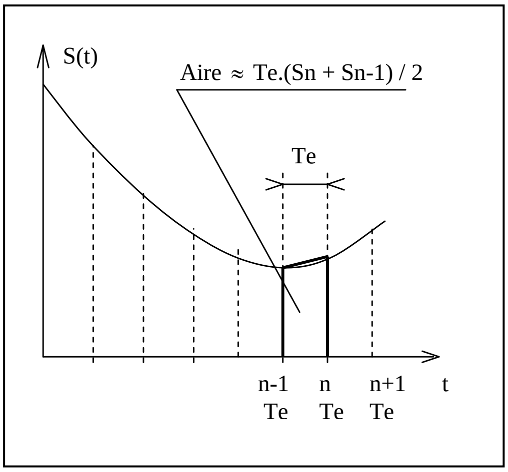
$$N.\int_{(n-1)Te}^{nTe} S(t).dt + \left[S(nTe) - S((n-1)Te)\right] = \left[E(nTe) - E((n-1)Te)\right]$$

soit en introduisant les notations discrètes :

$$N.\int_{(n-1)Te}^{nTe} S(t).dt + (S_n - S_{n-1}) = (E_n - E_{n-1})$$

on exprime le terme intégral par la méthode des trapèzes :

$$\int_{(n-1)Te}^{nTe} S(t).dt = aire\_sous\_courbe \approx \frac{Te}{2}(S_n + S_{n-1})$$



et on obtient :

$$N.\frac{Te}{2}(S_n + S_{n-1}) + (S_n - S_{n-1}) = (E_n - E_{n-1})$$

$$N.\frac{Te}{2}.S_n + N.\frac{Te}{2}.S_{n-1} + S_n - S_{n-1} = (E_n - E_{n-1})$$

$$S_n(1 + N.\frac{Te}{2}) + .S_{n-1}(N.\frac{Te}{2} - 1) = (E_n - E_{n-1})$$

ce qui permet d'exprimer le terme Sn cherché :

$S_n = \frac{2}{2+N.Te}.\left[S_{n-1}(1 - N.\frac{Te}{2}) + (E_n - E_{n-1})\right]$; ou encore :

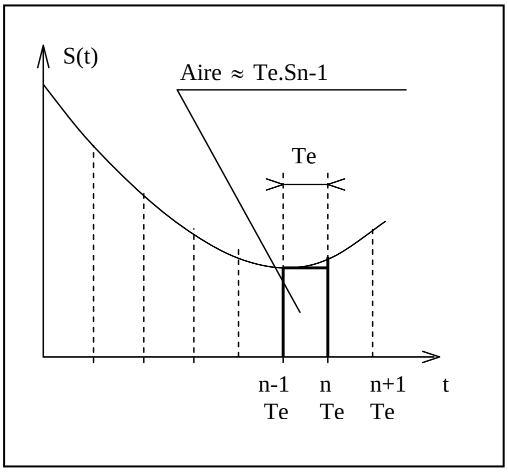
$$\boxed{S_n(dérivé) = \frac{1}{(2+N.Te)}\left[S_{n-1}(2 - N.Te) + 2(E_n - E_{n-1})\right]}$$

Nota : avec la méthode des rectangles pour l'intégrale, on aurait :

-----------------→ première possibilité

(en prenant la partie inférieure du rectangle)

$$\int_{(n-1)Te}^{nTe} S(t).dt \approx Te.S_{n-1}$$



et donc :

$$N.Te.S_{n-1} + (S_n - S_{n-1}) = (E_n - E_{n-1})$$

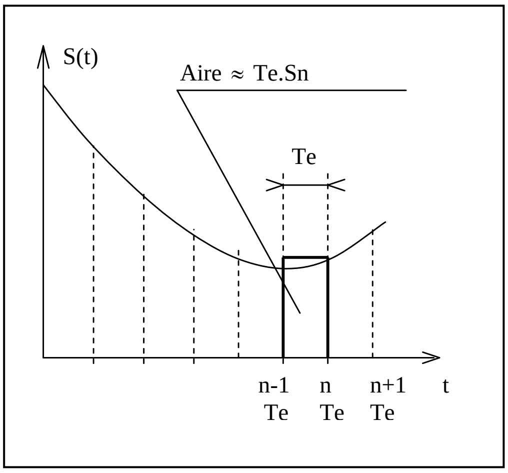
ou encore :

$$\boxed{S_n = (1 - N.Te).S_{n-1} + (E_n - E_{n-1})}$$

-----------------→ deuxième possibilité

(en prenant la partie supérieure du rectangle)

$$\int_{(n-1)Te}^{nTe} S(t).dt \approx Te.S_n$$



et donc :

$$N.Te.S_n + (S_n - S_{n-1}) = (E_n - E_{n-1})$$

ou encore :

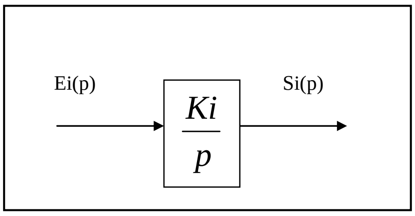
$$S_n.(1 + N.Te) = S_{n-1} + (E_n - E_{n-1})$$

ce qui donne :

$$\boxed{S_n = \frac{1}{(1 + N.Te)}\left[S_{n-1} + (E_n - E_{n-1})\right]}$$

Analysons le terme intégral :

Si(p) = $\frac{Ki}{p}$. Ei(p)



Modifions cette égalité pour ne faire apparaître que des p au numérateur :

$$p.S(p) = Ki.E(p)$$

repassons dans le domaine temporel et

remplaçons la multiplication par p du domaine de Laplace par la dérivation temporelle :

$$\frac{dS(t)}{dt} = K_i.E(t)$$

intégrons cette égalité entre les deux instants d'échantillonnage : (n-1)Te et nTe :

$$\left[S(nTe) - S((n-1)Te)\right] = K_i.\int_{(n-1)Te}^{nTe} E(t).dt$$

soit en introduisant les notations discrètes :

$$S_n - S_{n-1} = K_i.\int_{(n-1)Te}^{nTe} E(t).dt$$

avec la méthode des rectangles pour l'intégrale, on a : $\int_{(n-1)Te}^{nTe} E(t).dt \approx Te.E_n$

donc

$$S_n - S_{n-1} = K_i.Te.E_n$$

alors :

$$\boxed{S_n = S_{n-1} + K_i.Te.E_n}$$

Nota : on aurait pu utiliser la méthode des trapèzes pour l'intégrale : $\int_{(n-1)Te}^{nTe} E(t).dt \approx \frac{Te}{2}(E_n + E_{n-1})$

On aurait eu :

$$S_n - S_{n-1} = K_i.\frac{Te}{2}(E_n + E_{n-1})$$

ce qui aurait permis d'exprimer le terme Sn cherché :

$$\boxed{S_n(intégral) = S_{n-1} + K_i.\frac{Te}{2}(E_n + E_{n-1})}$$