# Dossier ressources

## Chapitre 6

# Analyse du comportement d'un double-cardan

*Ce chapitre a un double objectif, d'abord celui d'analyser le caractère homocinétique ou non d'un double-cardan puis dans un deuxième temps d'aborder la notion de non surabondance géométrique d'un double-cardan dans son contexte d'utilisation.*



**Société DMS**
**Aéroparc Saint Martin – 12 rue de Caulet – 31300 TOULOUSE –** ☎ : + 33 (0)5 62 88 72 72 🕮 : + 33 (0)5 62 88 72 79
Site internet : www.dmseducation.com Email : info@dmseducation.com

*Information*
La suspension dite à la cardan semble remonter au IIIème siècle avant J.C.. Il faut toutefois attendre le XVIème siècle pour avoir des certitudes lorsque Gerolamo Cardano (1501-1576) imagina le dispositif destiné à isoler les boussoles marines des oscillations des navires. En 1664 le savant anglais Hooke déposa un brevet concernant la transmission de mouvement entre deux arbres concourants qui s'inspirait de la réalisation de Cardano et fût donc à l'origine du Hooke's joint (dénomination consacrée en Grande-Bretagne et en ex-URSS), de l'U joint (Universal joint aux Etats-Unis) ou du joint de Cardan (dénomination utilisée en France, en Italie, etc)

## 6.1. Présentation

La photo *fig. 6- 1* montre la situation du double-cardan dans le contexte de la liaison sol-arrière de la BMW R1200GS.

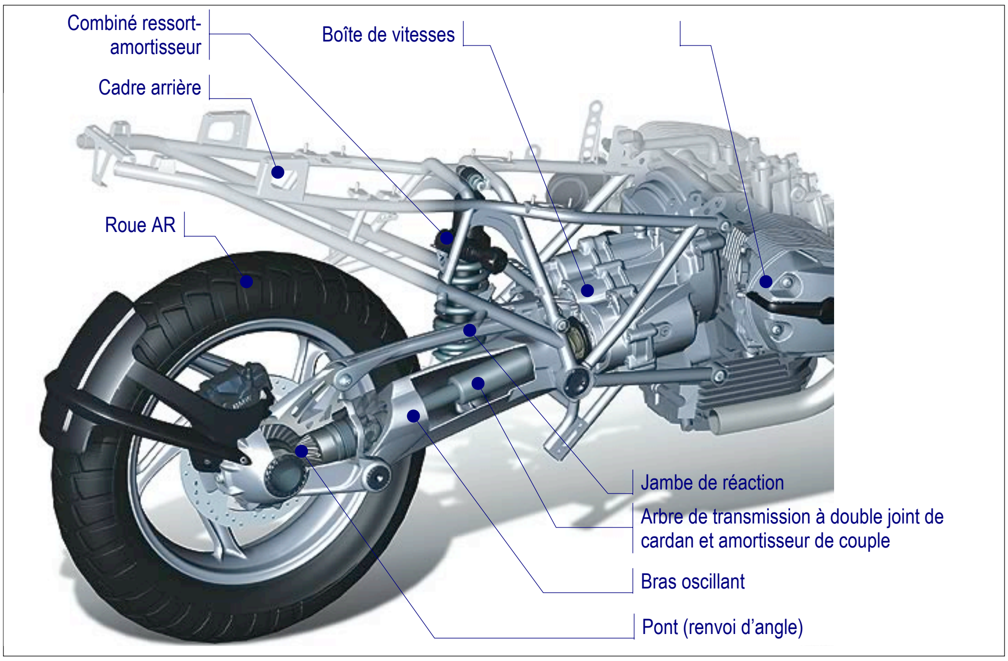


*fig. 6- 1*
*Photo de la liaison sol-arrière de la BMW R1200GS (doc. BMW)*

La *fig. 6- 2* permet de dénombre six sous-ensembles cinématiquement équivalents.

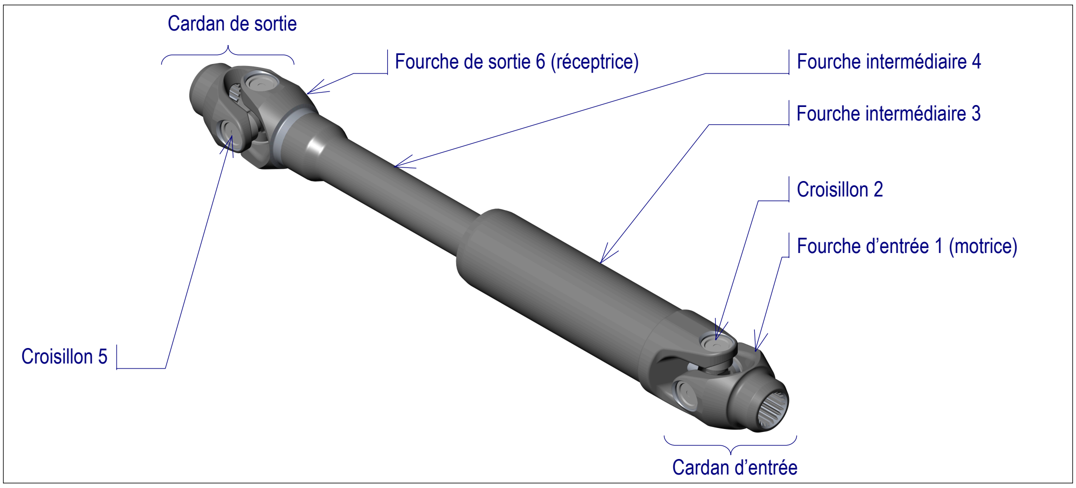


*fig. 6- 2*
*Constitution du double-cardan*

Les fourches intermédiaires (*fig. 6- 3*) sont en deux parties assemblées par un manchon en élastomère. Ainsi la liaison des deux fourches intermédiaires se comporte comme un accouplement élastique.

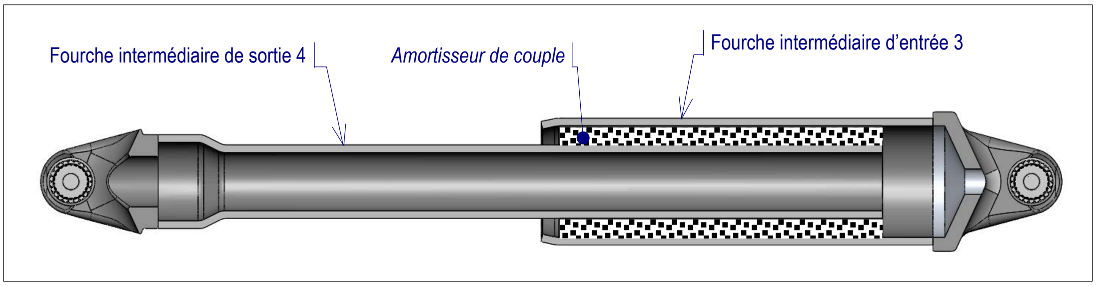


*fig. 6- 3*
*Fourches intermédiaires en coupe longitudinale*

La fourche d’entrée du double cardan est liée complètement à l’arbre de sortie de la boîte de vitesses par cannelures et jonc élastique. La fourche de sortie est en liaison glissière par cannelures avec l’arbre d’entrée du renvoi d’angle.
Le graphe de structure du double-cardan dans son contexte est donné *fig. 6- 4*.

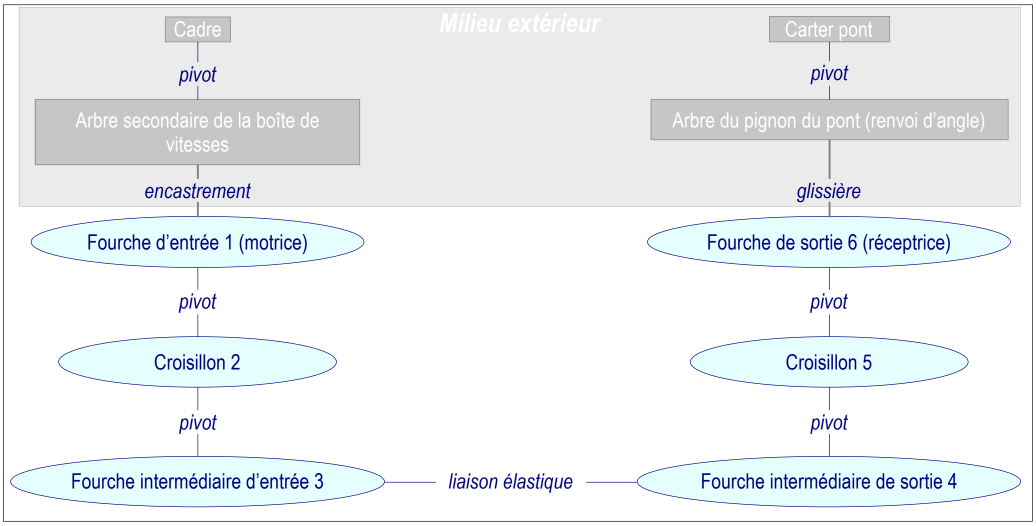


*fig. 6- 4*
*Graphe de structure*

## 6.2. Modélisation de la géométrie du double-cardan

Pour le cardan d’entrée (*fig. 6- 5*) :

- le repère $A;\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1$ est lié à la fourche d’entrée motrice repérée 1 avec $A;\vec{y}_1$ l’axe de la fourche et $A;\vec{z}_1$ l’axe des portées du croisillon ;
- le repère $A;\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2$ est lié au croisillon repéré 2 avec $A;\vec{x}_2$ et $A;\vec{z}_2$ les axes du croisillon ;
- le repère $A;\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_3$ est lié à la fourche intermédiaire repérée 3 avec $A;\vec{y}_3$ l’axe de la fourche et $A;\vec{x}_3$ l’axe des portées du croisillon ;

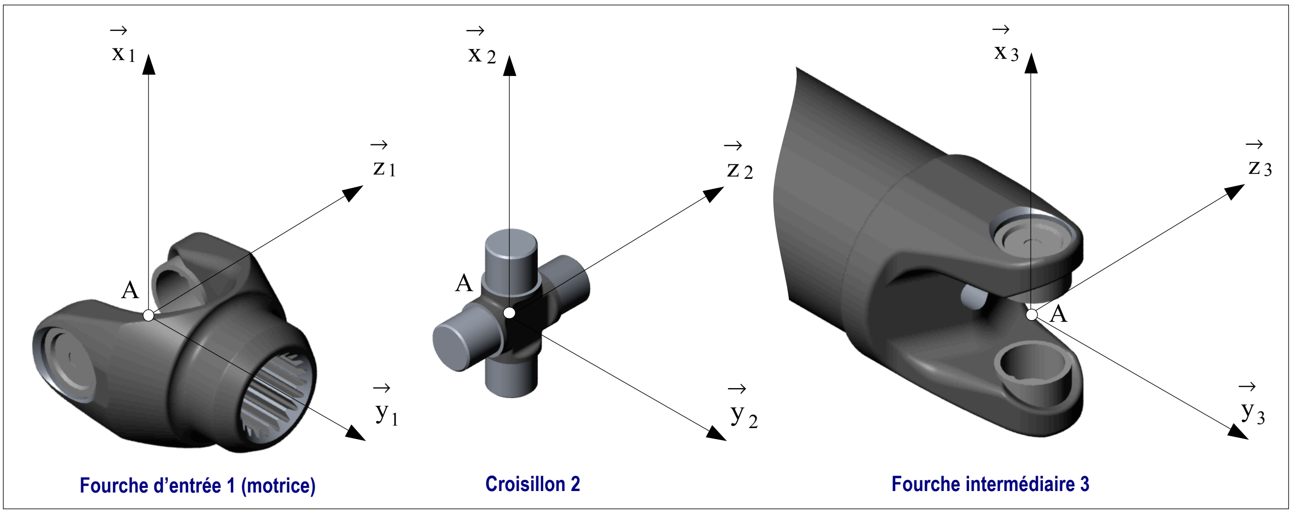


*fig. 6- 5*
*Repères liés aux éléments du cardan d'entrée*

Au montage des éléments du premier cardan (*fig. 6- 6*) $\vec{x}_2 = \vec{x}_3$ et $\vec{z}_1 = \vec{z}_2$.

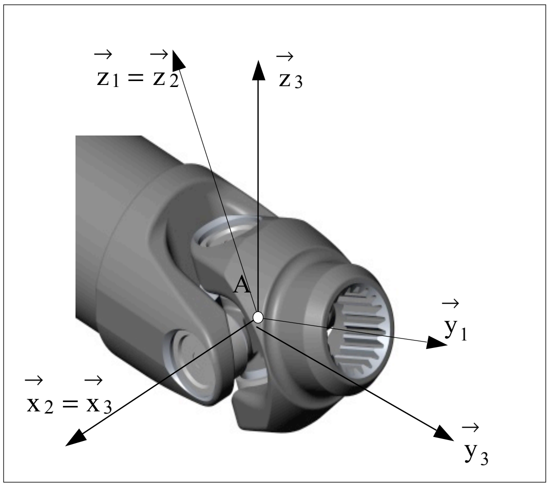


*fig. 6- 6*
*Montage du cardan d'entrée*

Pour le deuxième cardan (de sortie) *fig. 6- 7* :

- le repère $B; \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4$ est lié à la fourche intermédiaire repérée 4 avec $B; \vec{y}_4$ l'axe de la fourche et $B; \vec{z}_4$ l'axe des portées du croisillon 5 ;
- le repère $B; \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5$ est lié au croisillon repéré 5 avec $B; \vec{x}_5$ et $B; \vec{z}_5$ les axes du croisillon ;
- le repère $B; \vec{x}_6, \vec{y}_6, \vec{z}_6$ est lié à la fourche de sortie repérée 6 avec $B; \vec{y}_6$ l'axe de la fourche et $B; \vec{z}_6$ l'axe des portées du croisillon ;

Au montage des éléments du deuxième cardan *fig. 6- 8* $\vec{x}_4 = \vec{x}_5$ et $\vec{z}_5 = \vec{z}_6$.

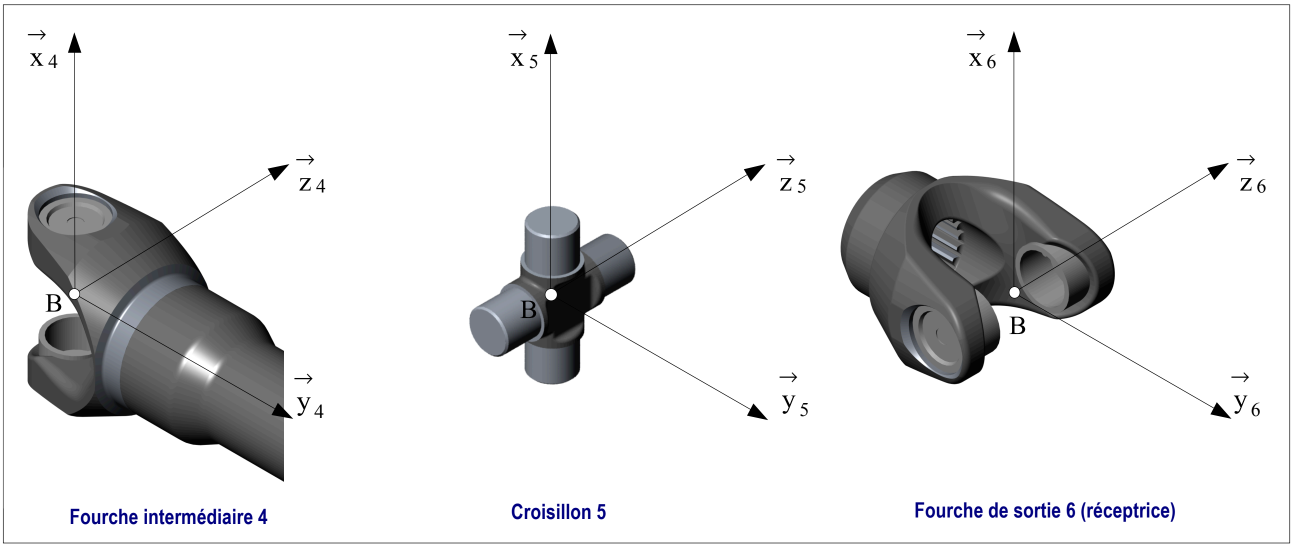


*fig. 6- 7*
*Repères liés aux éléments du cardan de sortie*

Le montage du deuxième cardan sur le premier entraîne $\vec{y}_4 = \vec{y}_5$ et les repères associés aux fourches intermédiaires 3 et 4 sont décalés angulairement d'un angle $\gamma = (\vec{x}_3, \vec{x}_4) = (\vec{z}_3, \vec{z}_4)$ (*fig. 6- 9*)

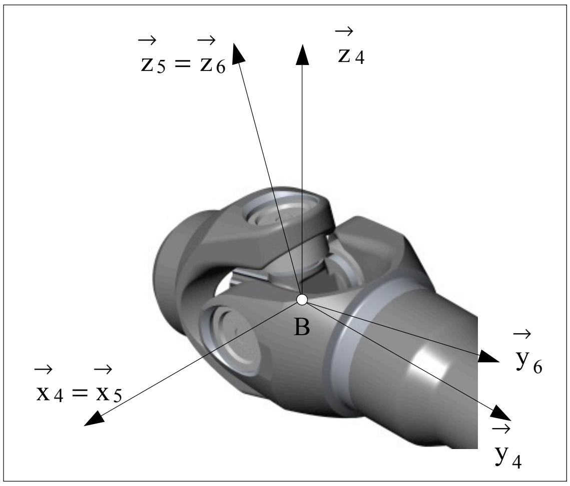


*fig. 6- 8*
*Montage du cardan de sortie*

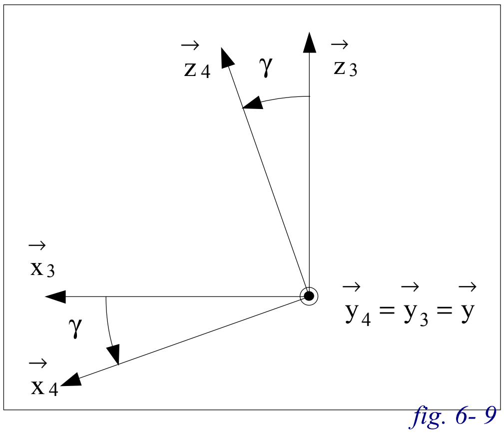


*fig. 6- 9*
*Orientation des bases associées au fourches intermédiaires 3 et 4*

## 6.3. Définition du contexte de montage du double cardan

Soit le repère $A;\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0$ dans lequel est placé le double cardan. Ce repère est construit à partir des centres des croisillons 2 et 5, respectivement A et B, tel que $\vec{y}_0 = \dfrac{\vec{BA}}{\|\vec{BA}\|}$ et $\vec{z}_0$ vertical ascendant.

L'orientation quelconque du double-cardan dans le repère 0 se caractérise par quatre paramètres définis de la manière suivante (*fig. 6- 10* et *fig. 6- 11*):

- l'axe $A;\vec{y}_1$ de la fourche motrice 1 et l'axe $A;\vec{y}_3$ de la fourche intermédiaire 3 définissent le plan $A;\vec{y}_0,\vec{z}_0$ du repère 0 et $\vec{y}_0 = \vec{y}_3$. Les axes sont concourants au point A, centre du croisillon d'entrée 2 et dans le cas général font, entre eux, un angle tel que $\alpha_1 = (\vec{y}_0,\vec{y}) = (\vec{z}_0,\vec{z})$. L'axe de la fourche motrice 1 est $A;\vec{y} \equiv A;\vec{y}_1$;
- l'axe de la fourche intermédiaire 4 $B;\vec{y}_4$ et l'axe de la fourche réceptrice 6 $B;\vec{y}_6$ définissent le plan $B;\vec{y}',\vec{z}'$ du repère 0. Les axes sont concourants au point B, centre du croisillon de sortie 5 et dans le cas général font, entre eux, un angle $\alpha_2 = (\vec{z}',\vec{Z}) = (\vec{y}',\vec{Y})$. Dans le plan $B;\vec{Y},\vec{Z}$, confondu avec le plan $B;\vec{y}',\vec{z}'$, l'axe de la fourche réceptrice 6 est $B;\vec{Y} = B;\vec{y}_6$;
- les plans précédents, $A;\vec{y}_0,\vec{z}_0$ et $B;\vec{Y},\vec{Z}$, font un angle $\beta$ ;

Les trois paramètres $\alpha_1$, $\alpha_2$ et $\beta$ sont imposés par le contexte dans lequel le double cardan est installé ; ce contexte est donc défini par le repère 0.

- L'angle de calage $\gamma$ des fourches intermédiaires est relatif au double-cardan lui-même.

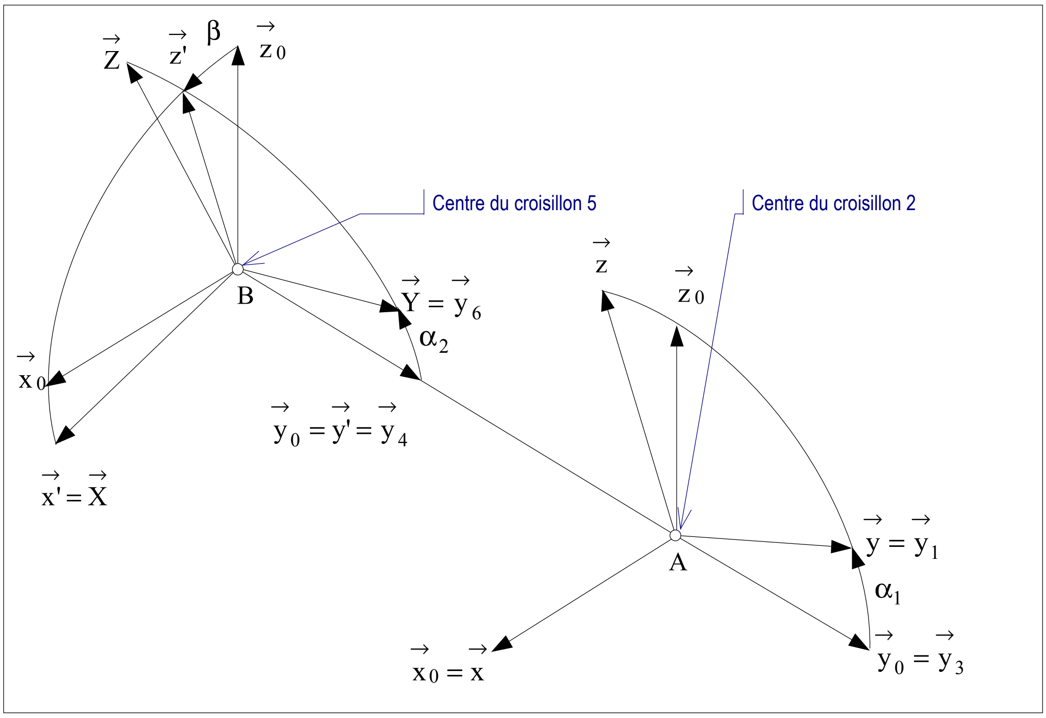


*fig. 6- 10*
*Orientations du double cardan dans le repère 0*

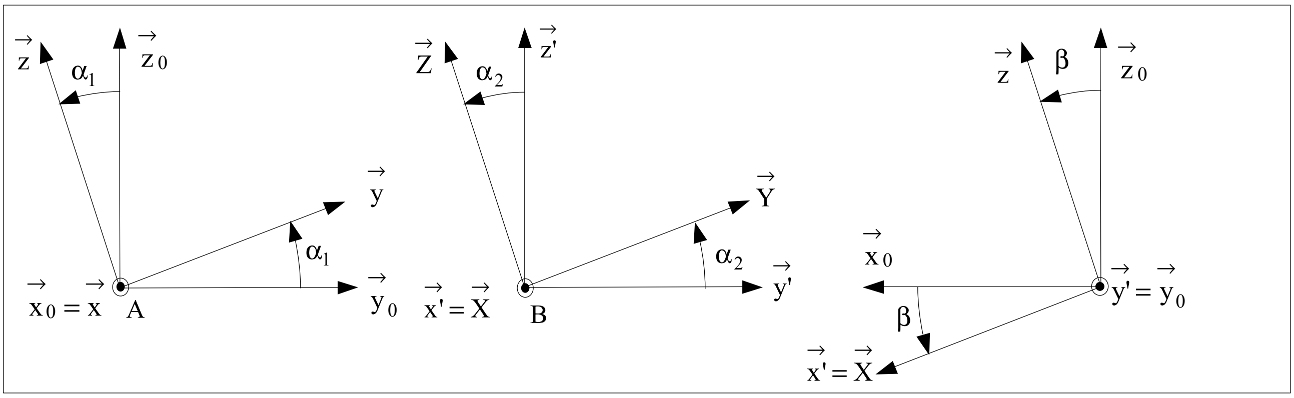


*fig. 6- 11*
*Définition des angles* $\alpha_1$ *,* $\alpha_2$ *et* $\beta$

## 6.4. Loi entrée-sortie géométrique

Le double-cardan dans le repère 0 permet la définition des orientations de la fourche d'entrée 1 et de la fourche de sortie 6 par rapport à ce repère

$$\varphi_{10} = (\vec{z}, \vec{z}_1) = (\vec{x}, \vec{x}_1) \text{ et } \varphi_{60} = (\vec{Z}, \vec{z}_6) = (\vec{X}, \vec{x}_6)$$

Par rapport au repère 0 l'orientation de la fourche intermédiaire est définie par

$$\varphi_{30} = (\vec{z}_0, \vec{z}_3) = (\vec{x}_0, \vec{x}_3)$$

Ces angles sont portés sur la *fig. 6- 12*.

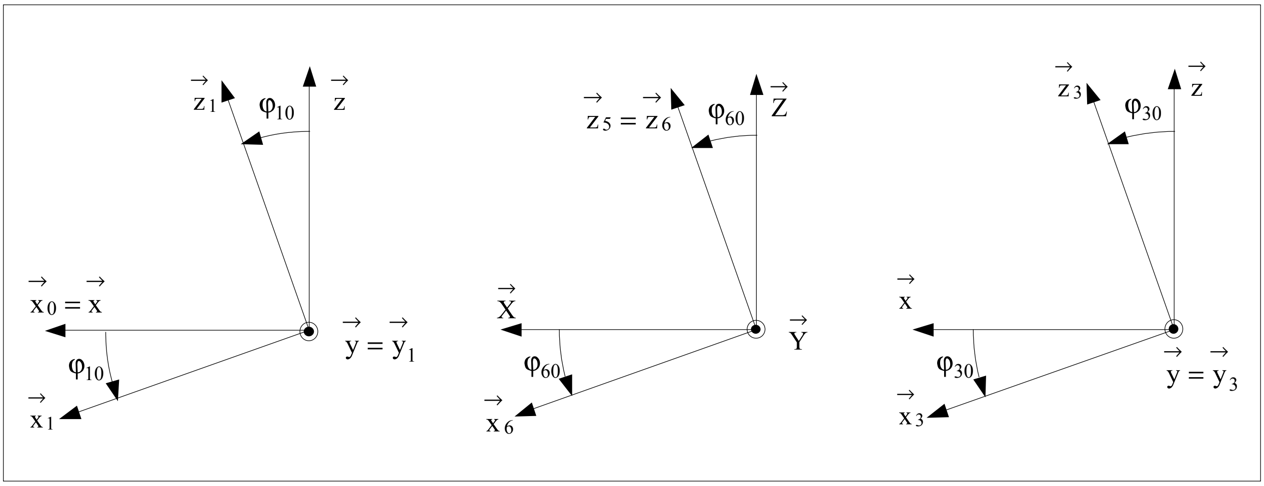


*fig. 6- 12*

*Définition des angles* $\varphi_{10}, \varphi_{60}, \varphi_{30}$

L'orientation de la fourche intermédiaire 4 par rapport à la fourche intermédiaire 3 est définie *fig. 6- 13*.

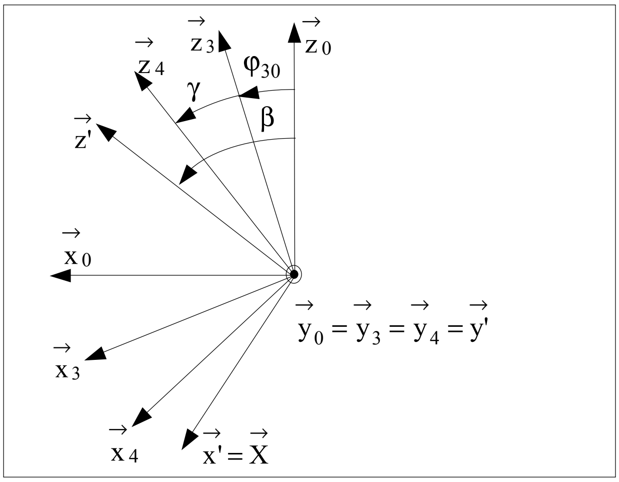


*fig. 6- 13*

Pour le premier cardan :

compte-tenu des liaisons entre la fourche d'entrée 1 et le croisillon 2 :

$$\vec{z}_1 = \vec{z}_2 \text{ et } \vec{x}_2 = \vec{x}_3$$

et comme les tourillons du croisillon sont par hypothèse perpendiculaire : $\vec{z}_1 . \vec{x}_3 = 0$

$$(\cos\varphi_{10}\,\vec{z} + \sin\varphi_{10}\,\vec{x}_0)(\cos\varphi_{30}\,\vec{x}_0 - \sin\varphi_{30}\,\vec{z}_0) = 0$$

$$-\cos\varphi_{10}\sin\varphi_{30}\,\vec{z}.\vec{z}_0 + \sin\varphi_{10}\cos\varphi_{30} = 0$$

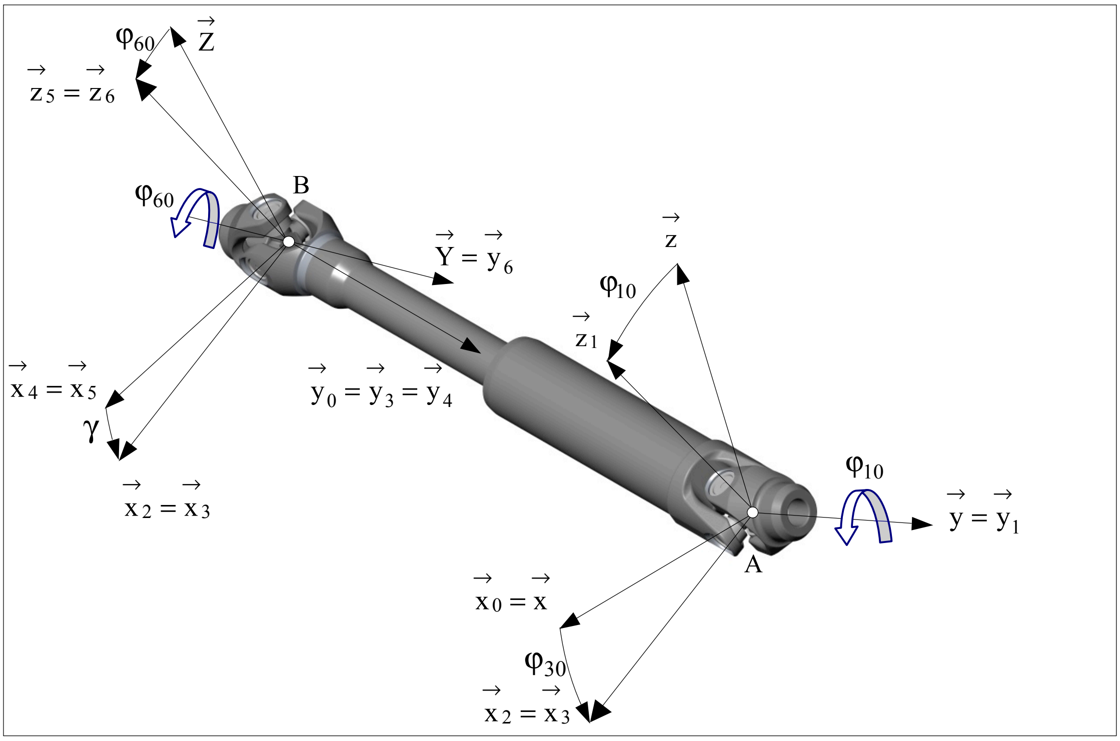


*fig. 6- 14*
*Paramétrage partiel du double-cardan*

avec $\vec{z}_0 . \vec{z} = \cos\alpha_1$

$$-\cos\varphi_{10}\sin\varphi_{30}\cos\alpha_1 + \sin\varphi_{10}\cos\varphi_{30} = 0$$

$$-\tan\varphi_{30}\cos\alpha_1 + \tan\varphi_{10} = 0$$

$$\tan\varphi_{30} = \frac{\tan\varphi_{10}}{\cos\alpha_1}$$

Pour le deuxième cardan :

comme pour le premier cardan on peut écrire pour le deuxième cardan : $\vec{x}_4 . \vec{z}_6 = 0$

$$\left[\cos(\varphi_{30} + \gamma - \beta)\,\vec{x}' - \sin(\varphi_{30} + \gamma - \beta)\,\vec{z}'\right](\cos\varphi_{60}\,\vec{Z} - \sin\varphi_{60}\,\vec{X}) = 0$$

$$\sin\varphi_{60}\cos(\varphi_{30} + \gamma - \beta) - \cos\alpha_2\cos\varphi_{60}\sin(\varphi_{30} + \gamma - \beta) = 0$$

$$\tan\varphi_{60} - \cos\alpha_2\tan(\varphi_{30} + \gamma - \beta) = 0$$

$$\tan\varphi_{60} - \cos\alpha_2\frac{\tan\varphi_{30} + \tan(\gamma - \beta)}{1 - \tan\varphi_{30}\tan(\gamma - \beta)} = 0$$

$$\tan\varphi_{60} = \cos\alpha_2\frac{\dfrac{\tan\varphi_{10}}{\cos\alpha_1} + \tan(\gamma - \beta)}{1 - \dfrac{\tan\varphi_{10}}{\cos\alpha_1}\tan(\gamma - \beta)}$$

$$\tan\varphi_{60} = \cos\alpha_2\frac{\tan\varphi_{10} + \cos\alpha_1\tan(\gamma - \beta)}{\cos\alpha_1 - \tan\varphi_{10}\tan(\gamma - \beta)}$$

lorsque $\varphi_{10} = 0$ (position initiale) $\tan\varphi^*_{60} = \cos\alpha_2 \tan(\gamma - \beta)$

alors l'angle de sortie prend une valeur telle que $\varphi^*_{60} = \arctan[\cos\alpha_2 \tan(\gamma - \beta)]$

si on mesure $\varphi_{60}$ à partir de cette nouvelle origine alors :

$$\varphi_{60} = \arctan\left[\cos\alpha_2 \frac{\tan\varphi_{10} + \cos\alpha_1 \tan(\gamma - \beta)}{\cos\alpha_1 - \tan\varphi_{10}\tan(\gamma - \beta)}\right] - \arctan[\cos\alpha_2 \tan(\gamma - \beta)]$$

## 6.5. Caractère homocinétique de la loi de transmission de mouvement

### 6.5.1. Pour un cardan

Pour le premier cardan (ensemble 1, 2 et 3), le rapport de transmission est défini par $\frac{\varphi_{30}}{\varphi_{10}}$ ou par $i = \frac{\omega_{30}}{\omega_{10}}$ en posant

$\frac{d\varphi_{30}}{dt} = \dot\varphi_{30} = \omega_{30}$ et $\frac{d\varphi_{10}}{dt} = \dot\varphi_{10} = \omega_{10}$

Si $i = 1$ alors le mécanisme est dit homocinétique ; il est dit non-homocinétique ou encore hétérocinétique dans le cas contraire.

L'hétérocinétie du mouvement des fourches d'entrée et de sortie respectivement 1 et 3 par rapport au support 0 peut être caractérisée par :

- le rapport de transmission : $i = \frac{\omega_{30}}{\omega_{10}}$ ;
- leur déplacement angulaire relatif (ou déviation angulaire) : $\varepsilon = \varphi_{30} - \varphi_{10}$
- le coefficient d'irrégularité cyclique : $\delta = \frac{\omega_{30\,maxi} - \omega_{30\,mini}}{\omega_{10}}$

#### 6.5.1.1. Rapport de transmission

Si l'angle de brisure $\alpha_1$ est par hypothèse constant, en dérivant par rapport au temps la relation $\tan\varphi_{30} = \frac{\tan\varphi_{10}}{\cos\alpha_1}$,

on obtient :

$$\left(1 + \tan^2\varphi_{30}\right)\frac{d\varphi_{30}}{dt} = \frac{1 + \tan^2\varphi_{10}}{\cos\alpha_1}\frac{d\varphi_{10}}{dt}$$

alors : $$i = \frac{\omega_{30}}{\omega_{10}} = \frac{1 + \tan^2\varphi_{10}}{\left(1 + \tan^2\varphi_{30}\right)\cos\alpha_1}$$

comme $\tan\varphi_{30} = \frac{\tan\varphi_{10}}{\cos\alpha_1}$ on obtient $\frac{\omega_{30}}{\omega_{10}} = \frac{\left(1 + \tan^2\varphi_{10}\right)\cos\alpha_1}{\cos^2\alpha_1 + \tan^2\varphi_{10}}$

ou encore $$\frac{\omega_{30}}{\omega_{10}} = \frac{\cos\alpha_1}{\cos^2\alpha_1 \cos^2\varphi_{10} + \sin^2\varphi_{10}}$$

en posant $\lambda = \frac{1}{\cos\alpha_1}$ alors $i = \frac{\omega_{30}}{\omega_{10}} = \frac{\lambda}{\lambda^2\cos^2\varphi_{10} + \sin^2\varphi_{10}} = \frac{2\lambda}{\left(1 + \lambda^2\right) + \left(1 - \lambda^2\right)\cos 2\varphi_{10}}$

Si on résout $\frac{\partial i}{\partial \varphi_{10}} = 0$ on trouve les valeurs extrêmes $i_{max,min} = \lambda^{\pm 1}$ soit $i_{max} = \frac{1}{\cos\alpha_1}$ et $i_{min} = \cos\alpha_1$

**Un joint de cardan utilisé seul n'est jamais homocinétique** (sauf évidemment si les arbres d'entrée et de sortie sont alignés).

Pour un angle de brisure $\alpha_1 = 60°$ la *fig. 6- 15* donne la variation du rapport de transmission *i* en fonction de l'angle de rotation de la fourche d'entrée 1 et la *fig. 6- 16* montre les variations de l'angle de rotation de la fourche 3 en fonction de l'angle de rotation de la fourche d'entrée 1.

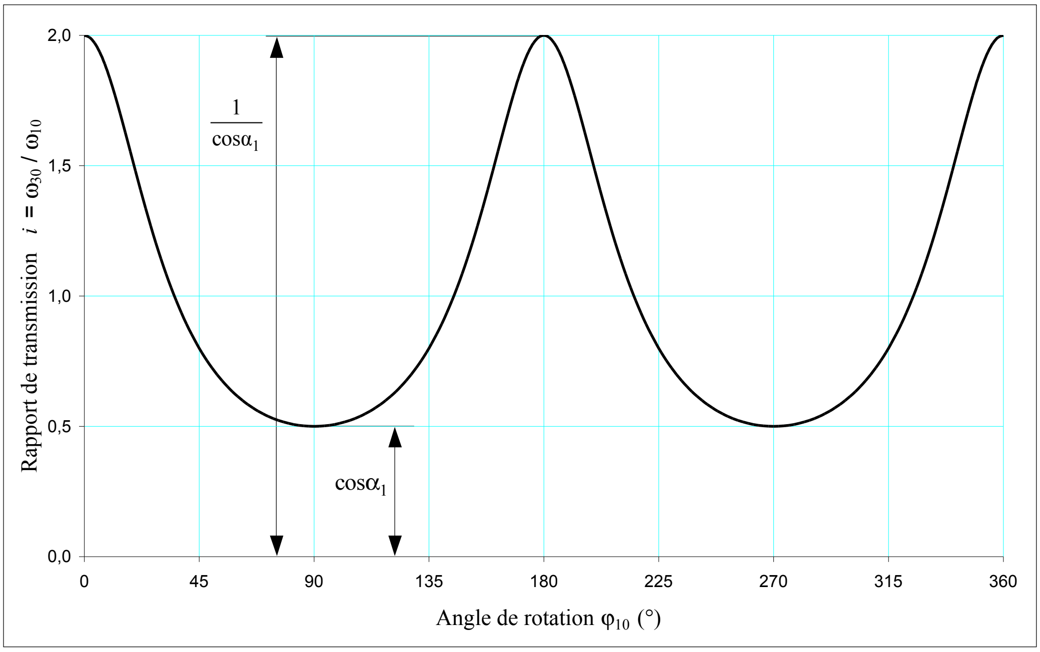


*fig. 6- 15*
*Rapport de transmission cinématique d'un cardan pour un angle de brisure* $\alpha_1 = 60°$

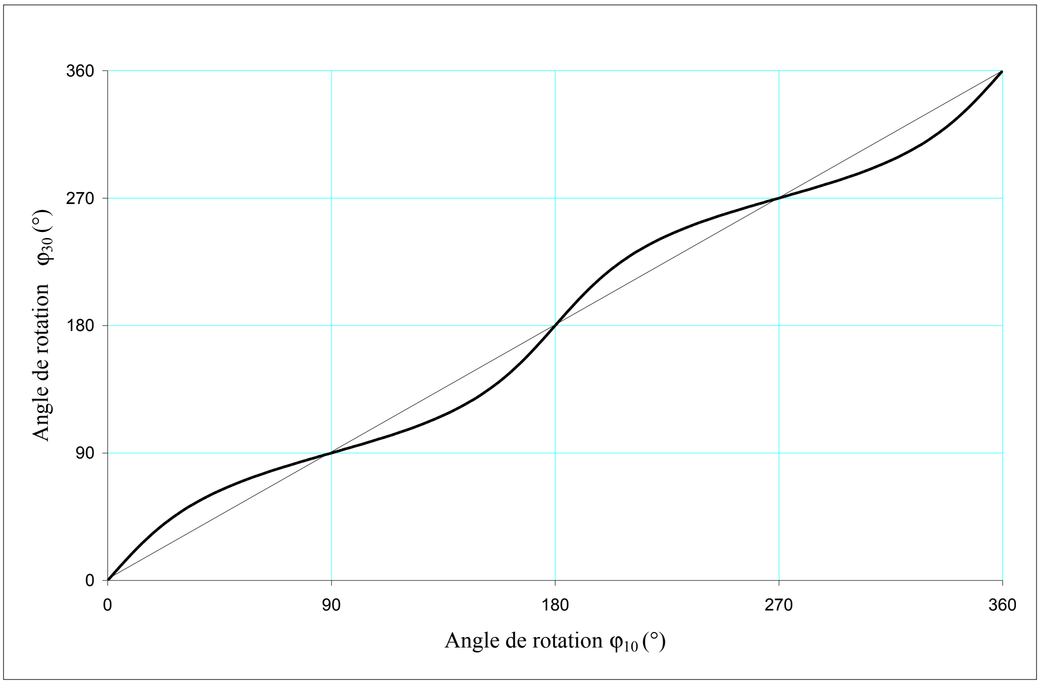


*fig. 6- 16*
*Variation de l'angle de rotation de la fourche 3*
*en fonction de l'angle de rotation de la fourche 1 pour un angle de brisure* $\alpha_1 = 60°$

### 6.5.1.2. Déplacement angulaire relatif ou déviation

Le déplacement angulaire relatif (ou décalage angulaire) des fourches 1 et 3 découle de la relation

$$\varepsilon = \varphi_{30} - \varphi_{10} = \arctan\left(\frac{\tan\varphi_{10}}{\cos\alpha_1}\right) - \varphi_{10} \qquad \text{car } \tan\varphi_{30} = \frac{\tan\varphi_{10}}{\cos\alpha_1}$$

En annulant la dérivée partielle $\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\varphi_{10}}$ on obtient les valeurs extrêmes de la déviation angulaire $\varepsilon$

En posant pour simplifier $\lambda = \dfrac{1}{\cos\alpha_1}$ la dérivation donne :

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varphi_{10}} = \frac{\lambda(1+\tan^2\varphi_{10})}{1+\lambda^2\tan^2\varphi_{10}} - 1$$ si l'angle de brisure $\alpha_1$ est par hypothèse constant,

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varphi_{10}} = 0 \text{ pour } \tan\varphi_{10} = \sqrt{\frac{1}{\lambda}}$$ alors :

$$\varepsilon_{max,min} = (\varphi_{30} - \varphi_{10})_{max,min} = \pm\arctan\frac{\lambda-1}{2\sqrt{\lambda}}$$

La *fig. 6- 17* représente le déplacement angulaire relatif des fourches 1 et 3, $\varepsilon = \varphi_{30} - \varphi_{10}$ pour trois valeurs de l'angle de brisure $\alpha_1 = 45°$, $\alpha_1 = 30°$ et $\alpha_1 = 15°$

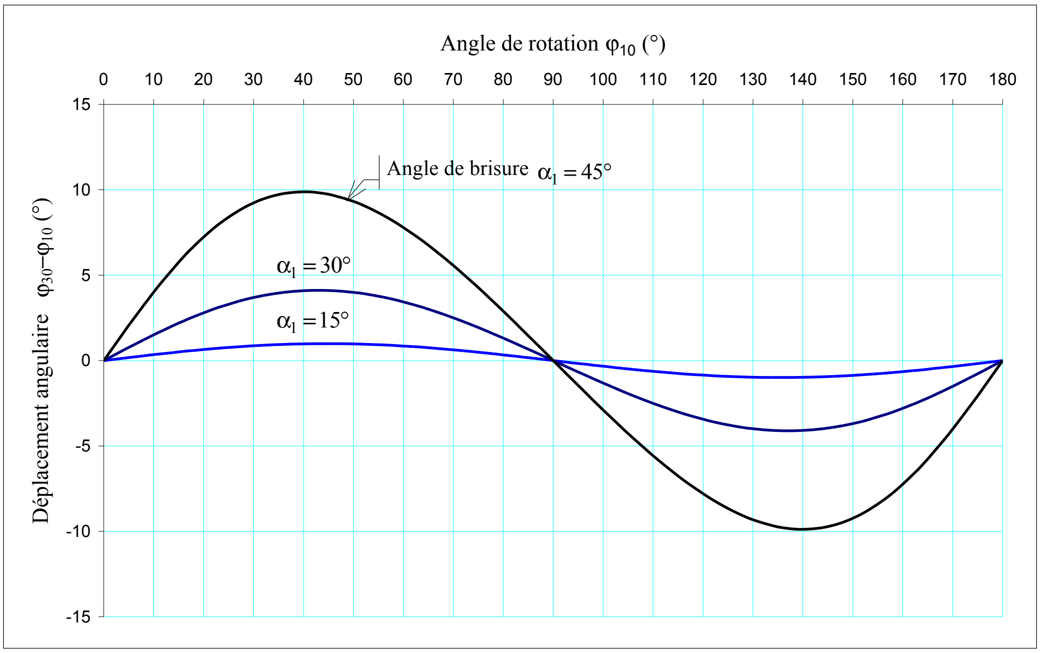


*fig. 6- 17*
*Déplacement relatif des fourches 1 et 3 en fonction de l'angle de rotation de la fourche 1 pour un angle de brisure* $\alpha_1$

La *fig. 6- 18* ci-dessous fournit la variation $\varepsilon_{max} = (\varphi_{30} - \varphi_{10})_{max} = \arctan\dfrac{\lambda-1}{2\sqrt{\lambda}}$ en fonction de l'angle de brisure $\alpha_1$

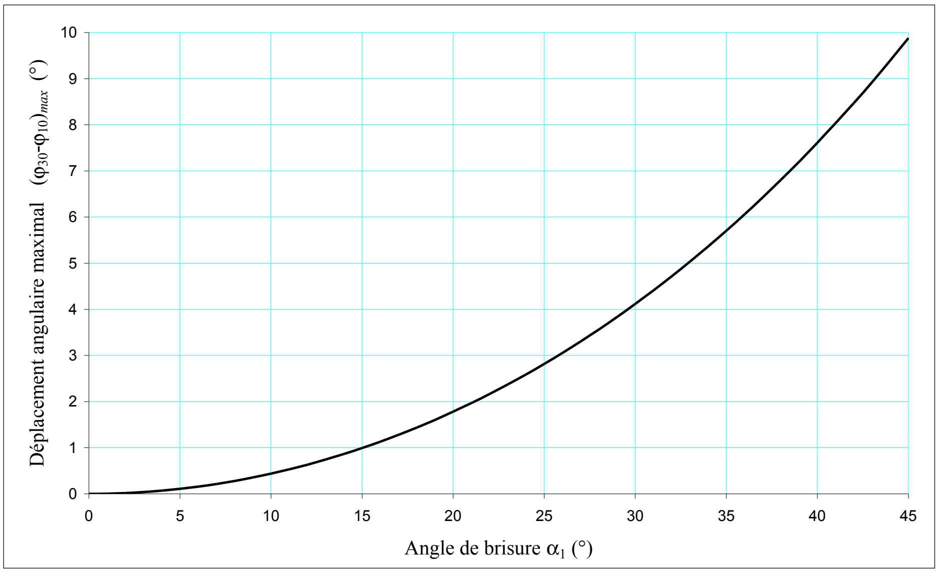


*fig. 6- 18*

*Déplacement angulaire maximal des fourches 1 et 3 en fonction de l'angle de brisure* $\alpha_1$

### 6.5.1.3. Coefficient d'irrégularité cyclique

Le degré d'irrégularité cyclique est défini par $\delta = \frac{\omega_{30\max i} - \omega_{30\min i}}{\omega_{10}}$ c'est-à-dire $\delta = i_{max} - i_{mini}$

Comme $i_{\max} = \frac{1}{\cos\alpha_1}$ et $i_{\min} = \cos\alpha_1$ alors $\delta = \tan\alpha_1 \sin\alpha_1$. La *fig. 6- 19* montre la variation de $i_{\min}$, $i_{\max}$ et $\delta = i_{\max} - i_{\min}$ en fonction de l'angle de brisure $\alpha_1$.

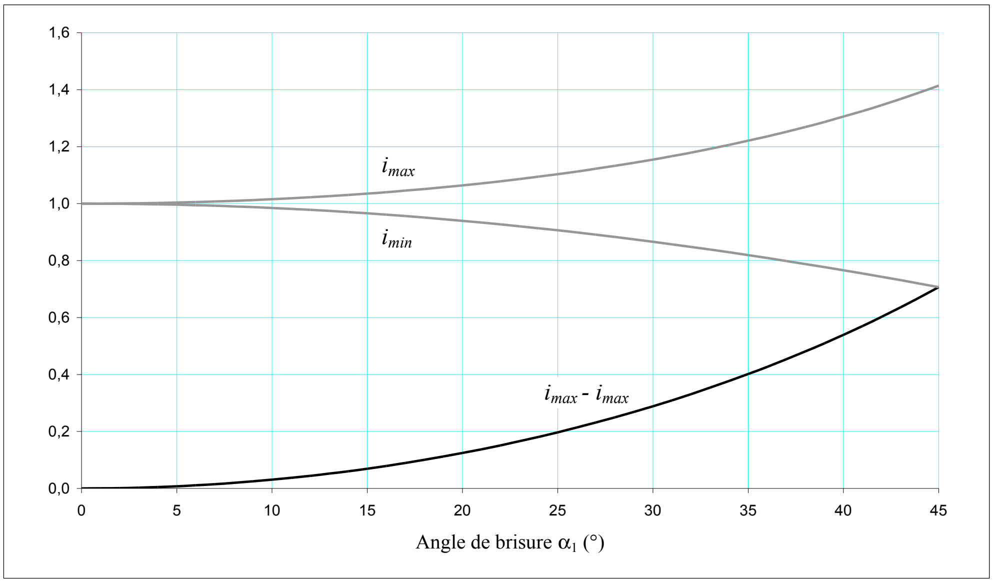


*fig. 6- 19*

*Irrégularité cyclique en fonction de l'angle de brisure* $\alpha_1$

### 6.5.1.4. Non perpendicularité des tourillons du croisillon

Ce paragraphe montre qu'il n'est pas nécessaire sur les dessins de définition d'un croisillon de joint de cardan de prescrire des tolérances étroites sur la perpendicularité des tourillons.
Le déplacement angulaire relatif des fourches d'entrée et de sortie est donné par la relation $\varepsilon = \varphi_{30} - \varphi_{10}$ lorsque les tourillons du croisillon sont rigoureusement perpendiculaires. On note $\varepsilon' = \varphi_{30} - \varphi_{10}$ le décalage angulaire des fourches lorsque les portées du croisillon ne sont pas perpendiculaires.
Ainsi il est possible de caractériser l'influence de la non perpendicularités des tourillons sur la cinématique du cardan par $\Delta\varepsilon = \varepsilon' - \varepsilon$ .
Une simulation cinématique montre que pour une non perpendicularité de $|\psi| = 3°$(*fig. 6- 20*) et un angle de brisure $\alpha_1 = 20°$ on obtient un écart maximal du décalage des fourches $\Delta\varepsilon \approx 0{,}18°$ par rapport au déplacement angulaire relatif du joint de cardan à tourillons de croisillon rigoureusement perpendiculaires.
En conclusion la non perpendicularité des tourillons du croisillon n'a pas d'influence notoire sur la cinématique du joint de cardan. Cette conclusion valide l'hypothèse énoncée au §6.4 . Il serait absurde de prescrire une tolérance étroite sur la perpendicularité des tourillons.

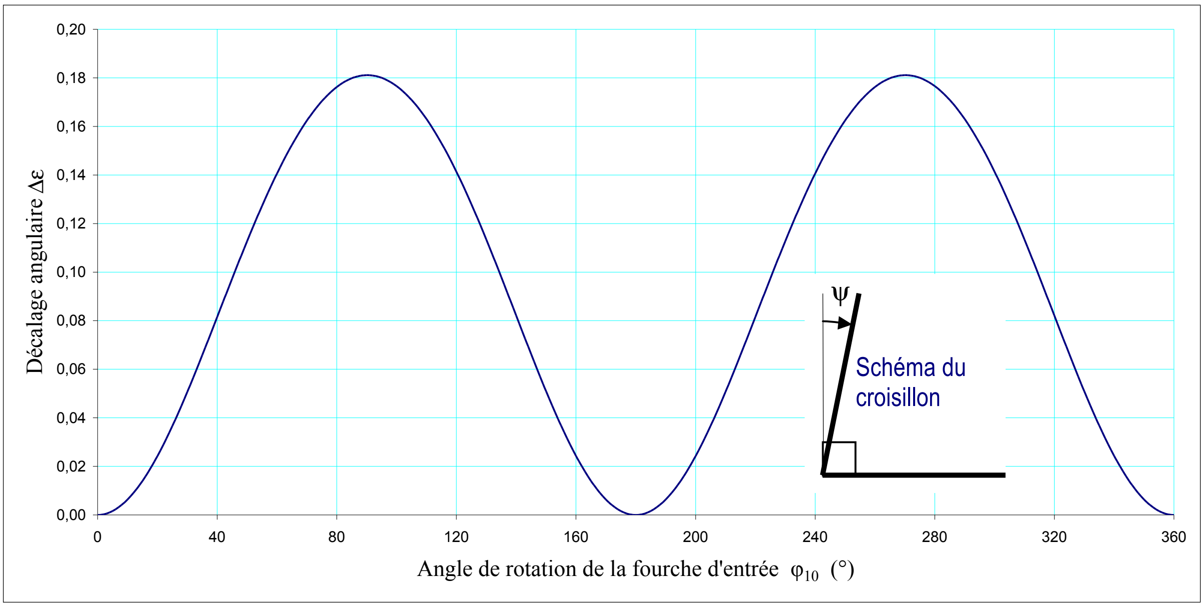


*fig. 6- 20*

## 6.5.2. Transmissions homocinétiques par double cardan

La recherche des paramètres nécessaires à l'obtention d'une transmission homocinétique par double cardan peut être conduite à partir de la relation

$$\tan\varphi_{60} = \cos\alpha_2 \frac{\tan\varphi_{10} + \cos\alpha_1 \tan(\gamma-\beta)}{\cos\alpha_1 - \tan\varphi_{10}\tan(\gamma-\beta)}$$

La transmission est homocinétique si $\tan\varphi_{60} = \tan\varphi_{10}$

Posons $\tan\varphi_{60} = \tan\varphi_{10} = X$

alors le résultat ci-dessus s'écrit

$$X(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) - X^2\tan(\gamma-\beta) - \cos\alpha_1\cos\alpha_2\tan(\gamma-\beta) = 0$$

Ce polynôme est nul si et seulement si ses coefficients sont nuls, soit le système suivant :

$$\begin{cases}\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 \\ \tan(\gamma - \beta) = 0\end{cases}$$

Le troisième coefficient est alors nul

Le système est vérifié si et seulement si

$$\alpha_1 = \pm\alpha_2 + 2k\pi \text{ et } \gamma - \beta = k\pi$$

On vérifie bien que dans ce cas $\tan\varphi_{60} = \tan\varphi_{10}$ dans l'équation initiale.

Technologiquement $\alpha_1 = \pm\alpha_2$ et $\gamma = \beta$

Deux configurations usuelles pour lesquelles $\beta = \gamma = 0$ c'est-à-dire que les axes de rotation des quatre fourches sont dans un même plan :

- montage dit « en Z » : $\alpha_1 = \alpha_2$ (*fig. 6- 21*)
- montage dit « en W » : $\alpha_1 = -\alpha_2$ (*fig. 6- 22*)

La *fig. 6- 23* montre la variation de la déviation angulaire $\varphi_{60} - \varphi_{10}$ dans le cas où $\beta = 0$ , les fourches intermédiaires étant décalées $\gamma \neq 0$ et l'inclinaison des arbres d'entrée et de sortie étant $\alpha_1 = \alpha_2 = 15°$

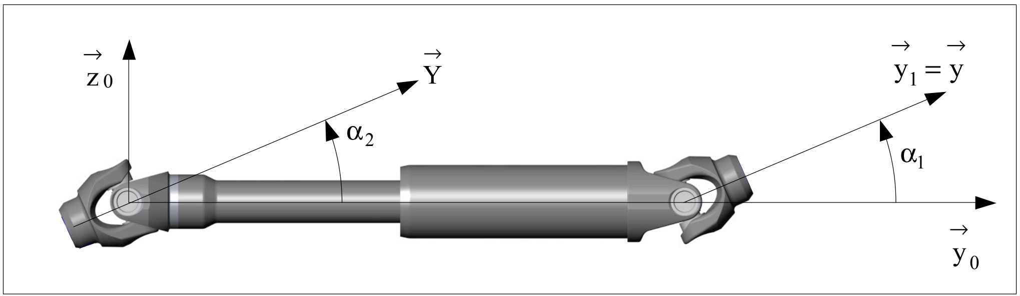


*fig. 6- 21*
*Montage en Z* $\alpha_1 = \alpha_2$

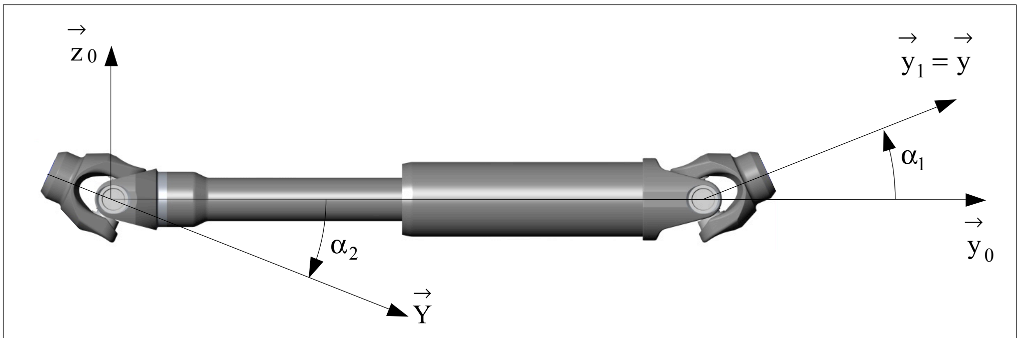


*fig. 6- 22*
*Montage en W* $\alpha_1 = -\alpha_2$

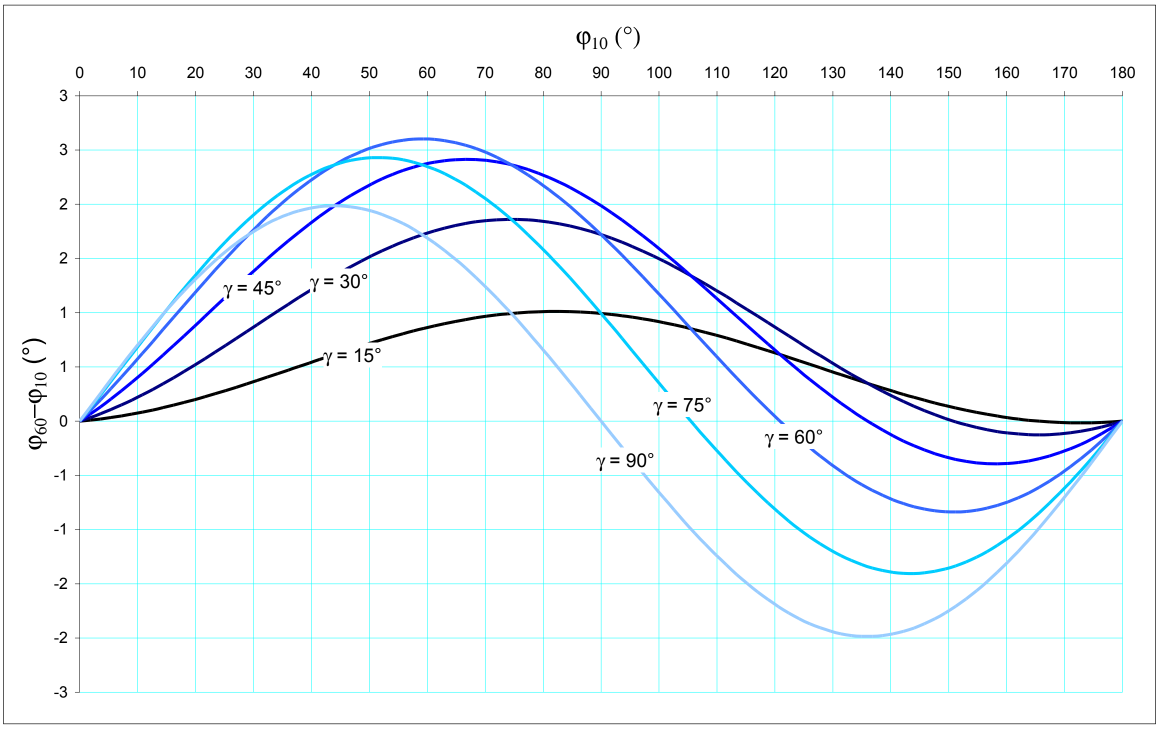


*fig. 6- 23*

## 6.6. Loi entrée-sortie du point de vue des efforts

### 6.6.1. Pour un cardan

On note $D = 1 \cup 2 \cup 3$ (*fig. 6- 24*) ; on suppose les liaisons énergétiquement parfaites et les poids et masses des éléments de *D* négligeables. Les arbres 1 et 3 sont soumis aux couples de moments, respectivement $M_1$ selon $\vec{y}_1$ et $M_3$ selon $\vec{y}_3$

Par application du théorème de l'énergie-puissance à l'ensemble *D* en mouvement par rapport au bâti 0, on trouve, puisque les puissances galiléennes des efforts intérieurs sont nulles :

$$P^0_{D\to 1} + P^0_{D\to 3} = \frac{\mathrm{d}E^0_D}{\mathrm{d}t} = 0$$

avec $P^0_{D\to 1} = M_1\omega_{10}$ et $P^0_{D\to 3} = M_3\omega_{30}$ d'où

$$M_1\omega_{10} + M_3\omega_{30} = 0$$

soit $M_3 = -M_1 \dfrac{\omega_{10}}{\omega_{30}}$

comme $\dfrac{\omega_{30}}{\omega_{10}} = \dfrac{\cos\alpha_1}{\cos^2\alpha_1 \cos^2\varphi_{10} + \sin^2\varphi_{10}}$

alors $M_3 = -M_1 \dfrac{\cos^2\alpha_1 \cos^2\varphi_{10} + \sin^2\varphi_{10}}{\cos\alpha_1}$

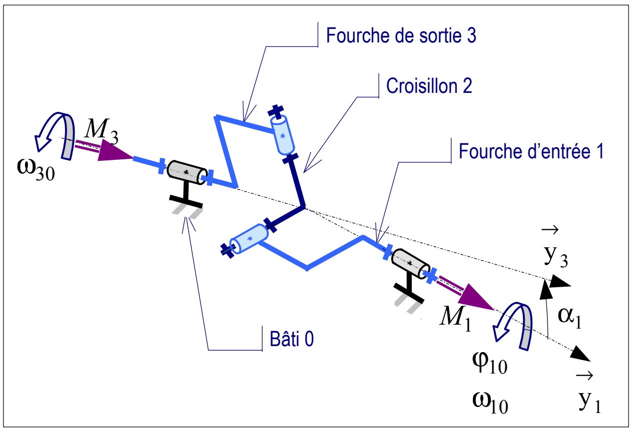


*fig. 6- 24*

### 6.6.2. Pour le double cardan

On note $D = 1 \cup 2 \cup 3 \cup 4 \cup 5 \cup 6$

Les arbres 1 et 6 sont soumis aux couples de moments, respectivement $M_1$ selon $\vec{y}_1$ et $M_6$ selon $\vec{y}_6$ (*fig. 6- 25*).

En procédant comme pour un cardan on trouve :

$$M_6 = -M_1 \frac{\omega_{10}}{\omega_{60}}$$

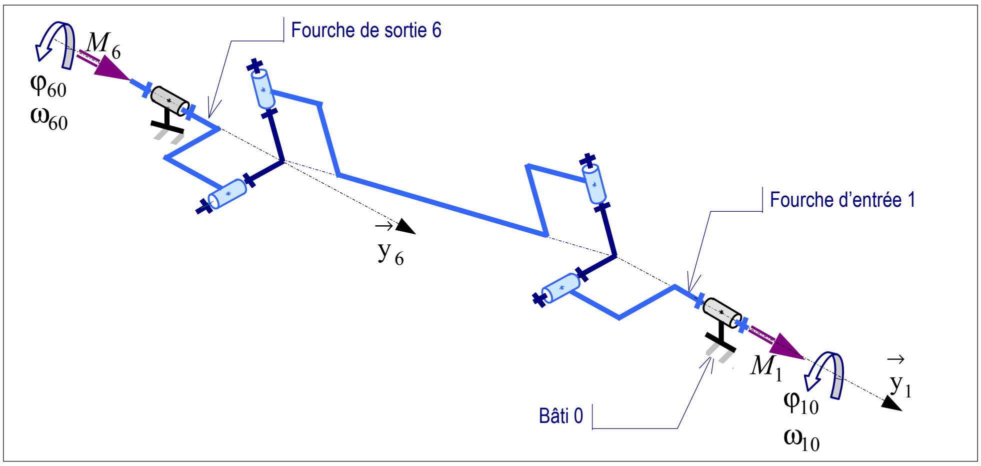


*fig. 6- 25*

## 6.7. Caractère isostatique d'une transmission par cardan(s)

L'isostatisme d'un mécanisme ou la non surabondance cinématique s'analyse (toujours !) à la lumière de la cinématique.

### 6.7.1. Cas d'un cardan

Le théorème de composition des mouvements sous forme torsorielle pour la boucle de solides 0, 1, 2, 3, 0 *fig. 6- 26* donne :

$$\left\{ {}^{0}\!/_{3} \right\} + \left\{ {}^{3}\!/_{2} \right\} + \left\{ {}^{2}\!/_{1} \right\} + \left\{ {}^{1}\!/_{0} \right\} = \{0\}$$

Si la géométrie du cardan simple est parfaite les axes des quatre liaisons pivot sont concourants en A et donc toutes les vitesses sont nulles en ce point.
Les torseurs cinématiques s'expriment par (*fig. 6- 26* et *fig. 6- 27*):

$$\left\{ {}^{3}\!/_{0} \right\}_A = \begin{cases} \vec{\Omega}_3^{\,0} = \dot{\varphi}_{30}\,\vec{y}_3 \\ \vec{V}_{A_3}^{\,0} = \vec{0} \end{cases} \quad \left\{ {}^{3}\!/_{2} \right\}_A = \begin{cases} \vec{\Omega}_3^{\,2} = \dot{\varphi}_{32}\,\vec{x}_2 \\ \vec{V}_{A_3}^{\,2} = \vec{0} \end{cases} \quad \left\{ {}^{2}\!/_{1} \right\}_A = \begin{cases} \vec{\Omega}_2^{\,1} = \dot{\varphi}_{21}\,\vec{z}_1 \\ \vec{V}_{A_2}^{\,1} = \vec{0} \end{cases} \quad \left\{ {}^{1}\!/_{0} \right\}_A = \begin{cases} \vec{\Omega}_1^{\,0} = \dot{\varphi}_{10}\,\vec{y}_1 \\ \vec{V}_{A_1}^{\,0} = \vec{0} \end{cases}$$

La somme vectorielle des vecteurs vitesses angulaires

$$-\dot{\varphi}_{30}\,\vec{y}_3 + \dot{\varphi}_{32}\,\vec{x}_2 + \dot{\varphi}_{21}\,\vec{z}_1 + \dot{\varphi}_{10}\,\vec{y}_1 = \vec{0}$$

en conséquence sur $\vec{z}_1 = \vec{z}_2$, donne

$$-\dot{\varphi}_{30}\left(\vec{y}_3.\vec{z}_1\right) + \dot{\varphi}_{32}\left(\vec{x}_2.\vec{z}_1\right) + \dot{\varphi}_{21}\left(\vec{z}_1.\vec{z}_1\right) + \dot{\varphi}_{10}\left(\vec{y}_1.\vec{z}_1\right) = 0$$

$$\dot{\varphi}_{21} - \dot{\varphi}_{30}\left(\vec{y}_3.\vec{z}_1\right) = 0$$

avec

$$\vec{y}_3 = \cos\alpha_1\,\vec{y}_0 + \sin\alpha_1\,\vec{z}_0$$

$$\vec{z}_1 = \sin\varphi_{10}\,\vec{x}_0 + \cos\varphi_{10}\,\vec{z}_0$$

d'où

$$\vec{y}_3.\vec{z}_1 = \cos\varphi_{10}\sin\alpha_1$$

alors

$$\dot{\varphi}_{21} - \dot{\varphi}_{30}\cos\varphi_{10}\sin\alpha_1 = 0$$

en conséquence sur $\vec{x}_2 = \vec{x}_3$

$$-\dot{\varphi}_{30}\left(\vec{y}_3.\vec{x}_2\right) + \dot{\varphi}_{32}\left(\vec{x}_2.\vec{x}_2\right) + \dot{\varphi}_{21}\left(\vec{z}_1.\vec{x}_2\right) + \dot{\varphi}_{10}\left(\vec{y}_1.\vec{x}_2\right) = 0$$

$$\dot{\varphi}_{32} + \dot{\varphi}_{10}\left(\vec{y}_1.\vec{x}_2\right) = 0$$

$$\vec{y}_1.\vec{x}_2 = \vec{y}_0\left(\cos\varphi_{30}\,\vec{x}_0 - \sin\varphi_{30}\,\vec{z'}_0\right)$$

$$\vec{y}_1.\vec{x}_2 = -\sin\varphi_{30}\,\vec{z'}_0.\vec{y}_0$$

$$\vec{y}_1.\vec{x}_2 = -\sin\varphi_{30}\left(\cos\alpha_1\,\vec{z}_0 - \sin\alpha_1\,\vec{y}_0\right)\vec{y}_0$$

$$\vec{y}_1.\vec{x}_2 = \sin\varphi_{30}\sin\alpha_1$$

$$\dot{\varphi}_{32} + \dot{\varphi}_{10}\sin\varphi_{30}\sin\alpha_1 = 0$$

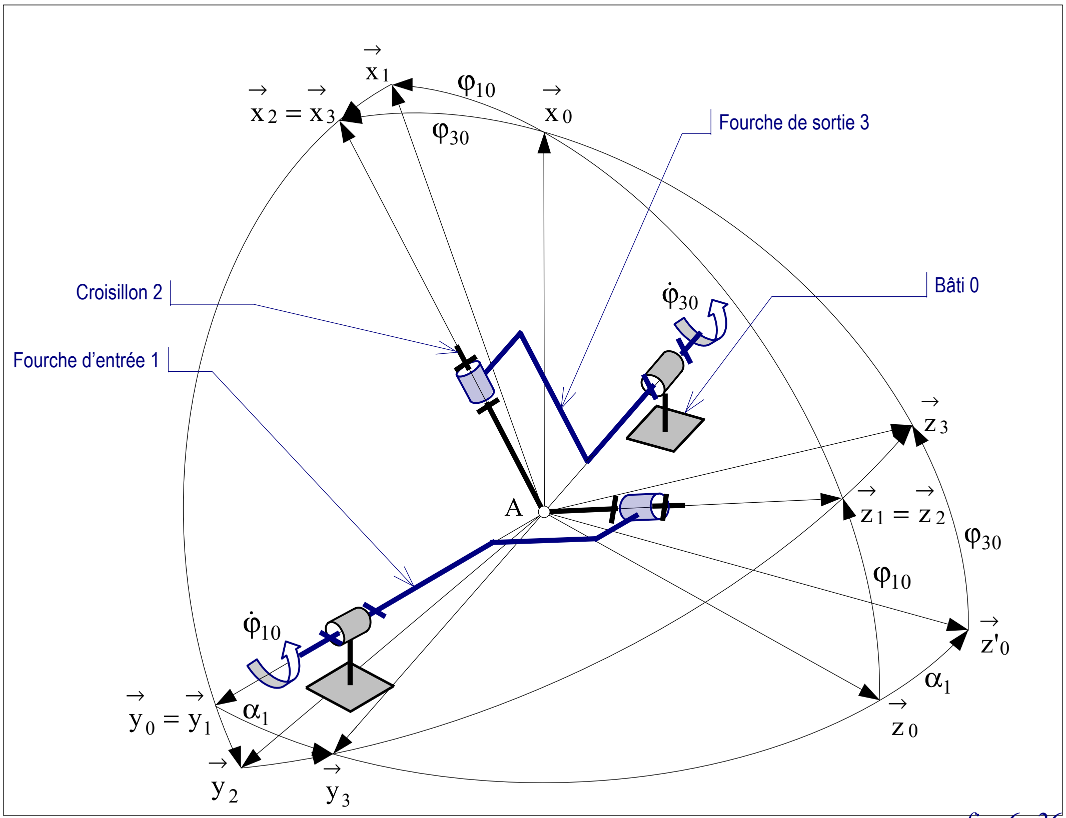


*fig. 6- 26*
*Paramétrage d'un cardan*

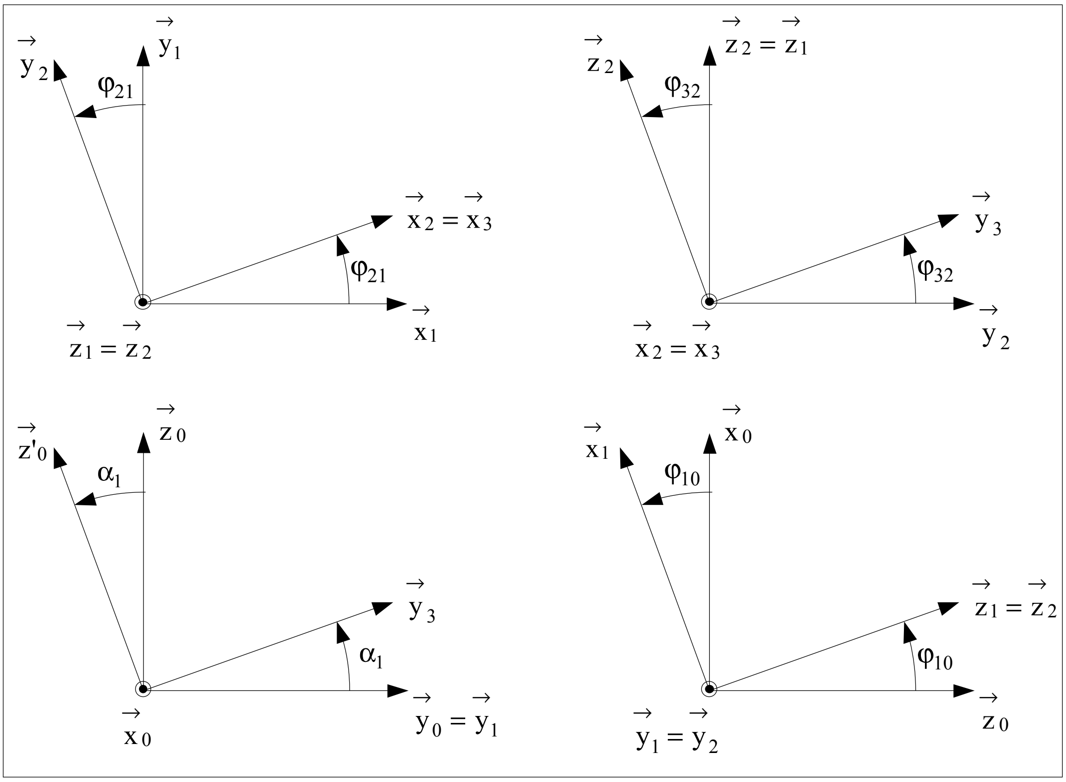

*fig. 6- 27*

en conséquence sur $\vec{y}_3$

$$-\dot{\varphi}_{30}\left(\vec{y}_3.\vec{y}_3\right)+\dot{\varphi}_{32}\left(\vec{x}_2.\vec{y}_3\right)+\dot{\varphi}_{21}\left(\vec{z}_1.\vec{y}_3\right)+\dot{\varphi}_{10}\left(\vec{y}_1.\vec{y}_3\right)=0$$

$$-\dot{\varphi}_{30}+\dot{\varphi}_{21}\left(\vec{z}_1.\vec{y}_3\right)+\dot{\varphi}_{10}\left(\vec{y}_1.\vec{y}_3\right)=-\dot{\varphi}_{30}+\dot{\varphi}_{21}\cos\varphi_{10}\sin\alpha_1+\dot{\varphi}_{10}\cos\alpha_1=0$$

$$\dot{\varphi}_{21}-\dot{\varphi}_{30}\cos\varphi_{10}\sin\alpha_1=0$$
$$\dot{\varphi}_{32}+\dot{\varphi}_{10}\sin\varphi_{30}\sin\alpha_1=0$$
$$-\dot{\varphi}_{30}+\dot{\varphi}_{21}\cos\varphi_{10}\sin\alpha_1+\dot{\varphi}_{10}\cos\alpha_1=0$$

en combinant la première et la troisième équation on obtient le rapport de transmission

$$\frac{\dot{\varphi}_{30}}{\dot{\varphi}_{10}}=\frac{\cos\alpha_1}{1-\cos^2\varphi_{10}\sin^2\alpha_1}$$

qui peut s'écrire

$$\frac{\dot{\varphi}_{30}}{\dot{\varphi}_{10}}=\frac{\cos\alpha_1}{\sin^2\varphi_{10}+\cos^2\varphi_{10}\cos^2\alpha_1}$$

On est en présence d'un système de 3 équations à 4 inconnues.
Si on se donne $\dot{\varphi}_{10}$ la fréquence de rotation de la fourche d'entrée 1 par rapport au bâti 0 alors les trois inconnues $\dot{\varphi}_{30}$ vitesse de rotation de la fourche de sortie 3 par rapport au bâti 0, $\dot{\varphi}_{21}$ et $\dot{\varphi}_{32}$ sont alors déterminées.
Ceci est conforme aux résultats de la théorie des mécanismes :
Le mécanisme ne comporte pas de mobilités internes donc pour une boucle fermée le degré de mobilité utile $m_{cu}$ est, avec $I_c$ le nombre total d'inconnues cinématiques et $r_c$ le rang du système d'équations homogènes

$$m_{cu}=I_c-r_c$$
$$m_{cu}=1 \text{ et } I_c=4$$

d'où $$r_c=I_c-m_{cu}=3$$

Le degré d'hyperstaticité ou de surabondance cinématique $h_c$ est donné, pour une boucle, par

$$h_c=6-r_c=3$$

Pour rendre le cardan cinématiquement non surabondant il faut donc mettre en place trois degrés de liberté supplémentaires en translation dans trois directions non coplanaires.
La première solution évidente est de remplacer trois des quatre liaisons pivot par des liaisons pivot glissant *fig. 6- 28*.
En règle générale afin de ne pas propager à l'intérieur d'un mécanisme des efforts parasites on ne modifie pas les liaisons d'entrée et de sortie du mécanisme. On préférera une solution qui consiste à modifier les liaisons internes. Dans ce cas une pièce doit être ajoutée dans la boucle fermée :
Pour obtenir un degré de surabondance cinématique nul il faut

$$r_c=6$$

soit $$I_c=m_{cu}+r_c=7$$

donc en conservant les liaisons d'entrée et de sortie et les deux liaisons pivot glissant du croisillon avec les fourches il reste à placer une liaison à un degré de liberté en série, soit une glissière, avec la liaison pivot d'entrée ou la liaison pivot de sortie *fig. 6- 29*.

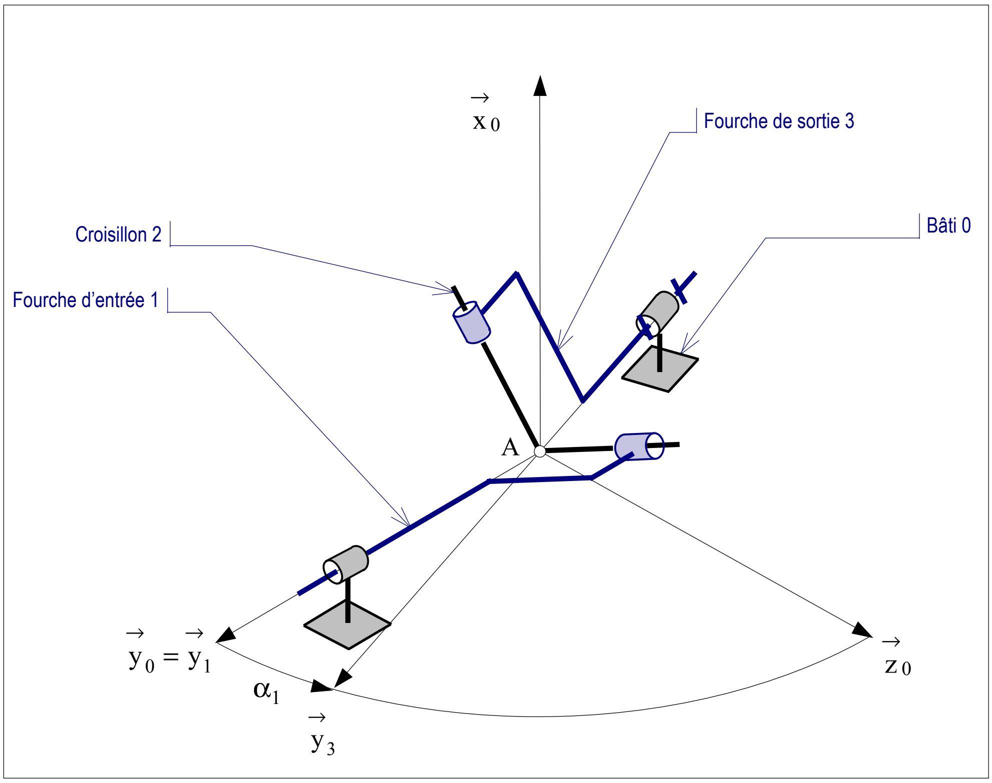
$\vec{x}_0$
Fourche de sortie 3
Croisillon 2
Bâti 0
Fourche d'entrée 1
A
$\vec{y}_0 = \vec{y}_1$
$\alpha_1$
$\vec{y}_3$
$\vec{z}_0$

*fig. 6- 28*

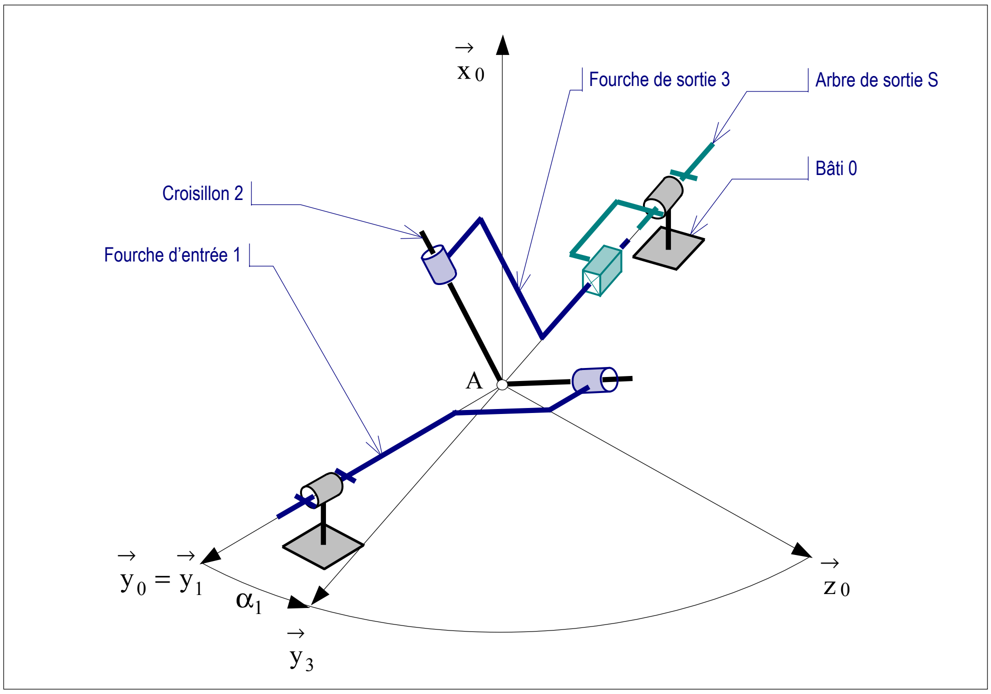


*fig. 6- 29*
*Montage isostatique d'un cardan*

### 6.7.2. Caractère isostatique ou non-surabondant du double-cardan

On considère que les fourches intermédiaires sont en liaison encastrement (*fig. 6- 30*).

Le mécanisme selon la boucle fermée 0-1-2-3-4-5-6-0 ne comporte pas de mobilités internes donc le degré de mobilité utile est donné par :

$$m_{cu} = I_c - r_c$$

avec $r_c$ nombre d'équations cinématiques indépendantes et $I_c$ le nombre total d'inconnues cinématiques.

Comme $I_c = 6$ et que l'observation de l'ensemble donne $m_{cu} = 1$ il est donc possible de considérer que $r_c = 5$

Le degré de surabondance cinématique (degré d'hyperstaticité) est défini par :

$$h_c = 6 - r_c \quad .$$

Le système est donc hyperstatique de degré 1.

Ces résultats peuvent être confirmés en menant une étude cinématique complète sur la boucle fermée de solides.

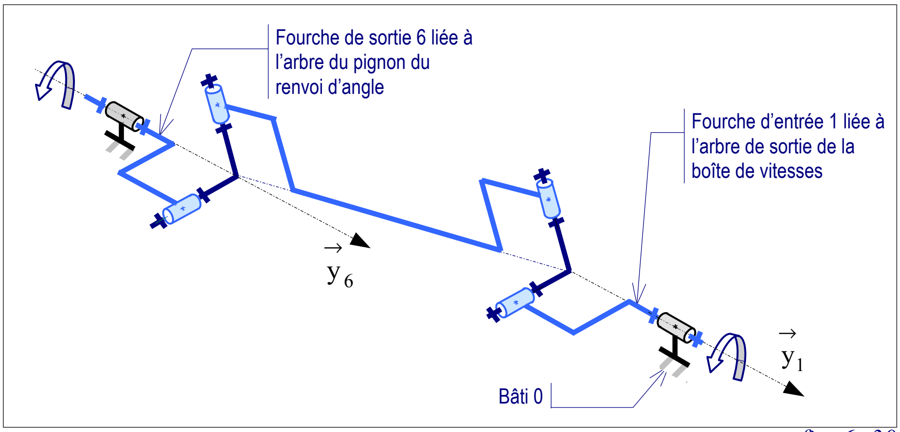


*fig. 6- 30*
*Montage isostatique d'un cardan*

La non surabondance cinématique peut être obtenue par exemple en plaçant
• une liaison glissière entre les deux fourches intermédiaires (solution 1, *fig. 6- 30*) ; elle permet aussi le réglage de l'angle $\beta$ . Cette solution fût adoptée en 1993 pour le montage du double cardan de la BMW R1100 RS.

• une liaison glissière entre la fourche de sortie et l'arbre d'entrée du renvoi d'angle (solution 2, *fig. 6- 30* ). C'est la solution retenue pour la BMW R1200 GS.

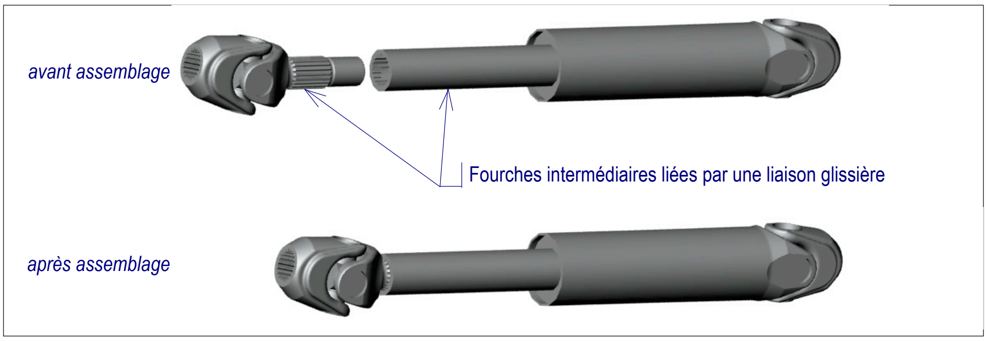


*fig. 6- 31*
*Maquette numérique du double-cardan de la BMW R 1100 RS*

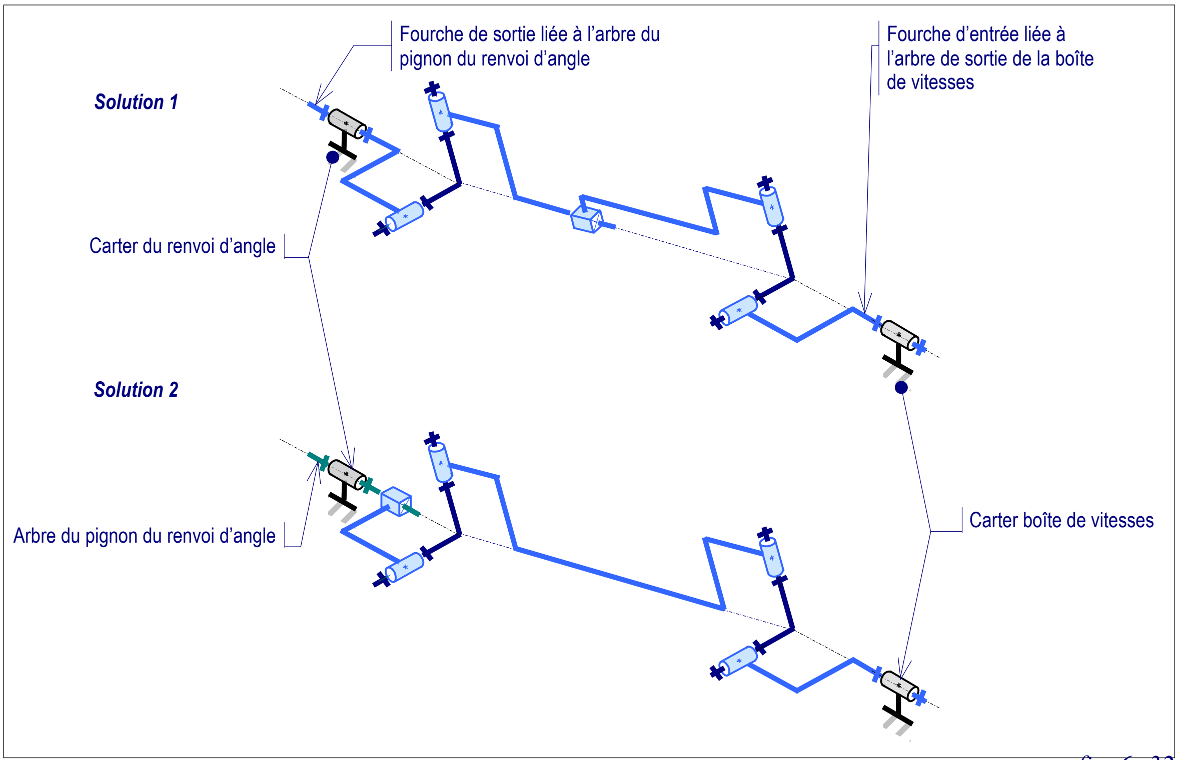


*fig. 6- 32*

*Schéma du double-cardan de la BMW R1100 RS (solution 1) et de la BMW R1200GS (solution 2)*