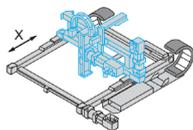


# Control'X

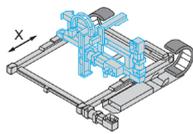
## Éléments de modélisation





**Ctrl + clic pour suivre un lien**

Structure de Control'X : présentation générale	page 3
Modèle pour commencer : modèle de base	page 9
Limites du modèle de base	page 18
Le PC : l'échantillonnage	page 19
Le PC : le codage de l'information	page 22
Le PC : le caractère non temps réel du traitement effectué	page 24
La carte de commande : la saturation	page 26
La carte de commande : la quantification	page 28
La carte de puissance : le PWM	page 29
La carte de puissance : la saturation en tension	page 38
La carte de puissance : la saturation en intensité	page 39
La carte de puissance : la dynamique négligée	page 42
Le moteur : la constante de temps électrique non prise en compte	page 43
Le moteur : les perturbations négligées	page 50
Codeur incrémental : la quantification	page 56
La mécanique : jeu du réducteur, élasticité de l'accouplement et de la courroie	page 57
En résumé : Différences modèle - réel	page 60
Modélisation du moteur seul	page 63
Du schéma bloc du motoréducteur en schéma d'un moteur équivalent	page 65
Modèle mécanique	page 72
Schéma bloc d'un moteur linéaire équivalent	page 75
Modèles plus évolués sur la base du moteur linéaire équivalent : équivalence tension de seuil frottements secs	page 91
Modèles dérivés du modèle de moteur linéaire équivalent : prise en compte de tous les efforts perturbateurs	page 91



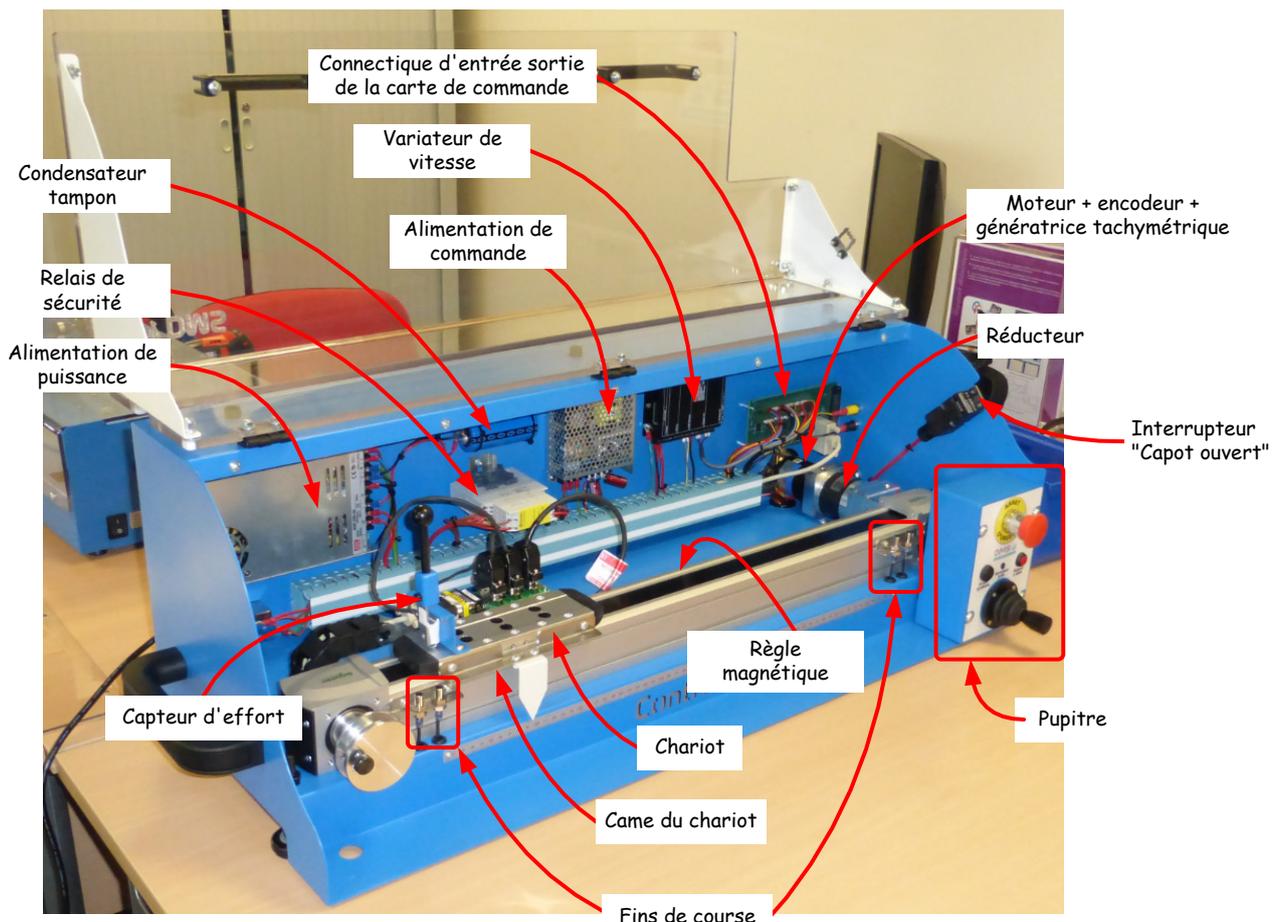
# Structure de Control'X

[Ctrl + clic pour revenir au sommaire](#)

Les schémas ci-après présentent l'architecture de Control'X :

Control'X est un axe linéaire asservi en position. Il repose principalement sur les éléments matériels suivants :

- Un PC qui fait tourner un logiciel de commande d'axe nommé Control'Drive
- Une carte de commande
- Une carte de puissance
- L'axe proprement dit : moteur, réducteur, poulies-courroie, chariot et codeur incrémental monté sur l'arbre du moteur



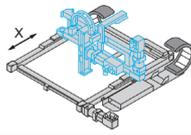
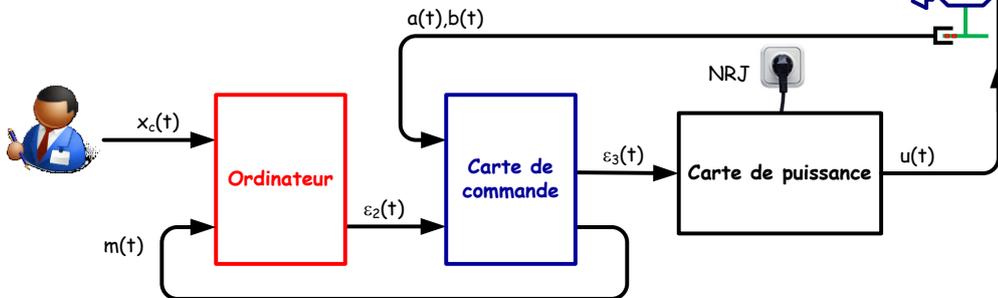
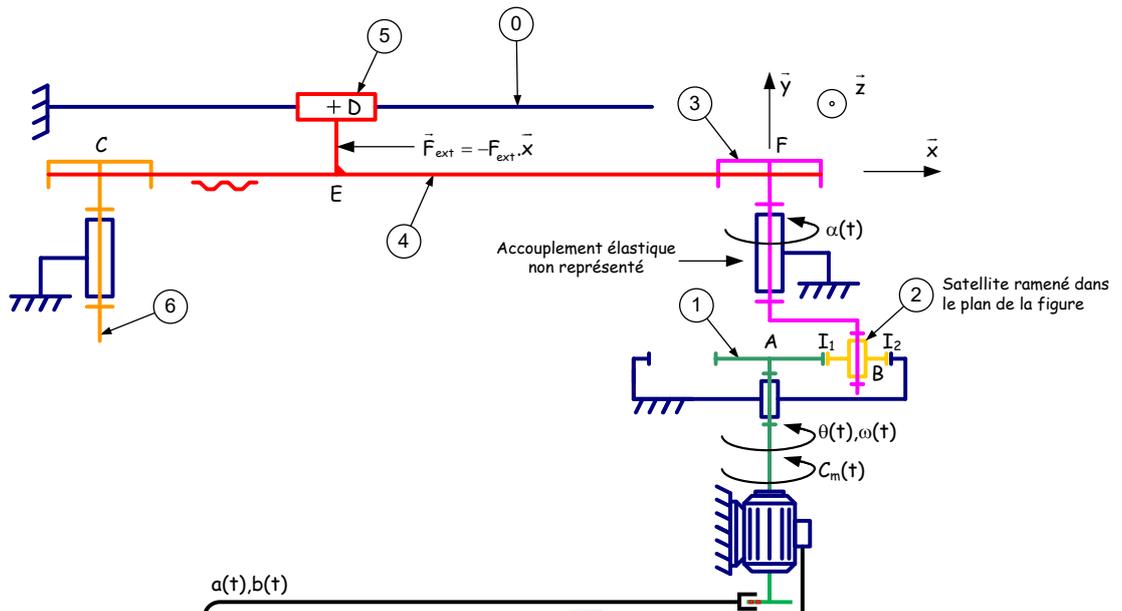
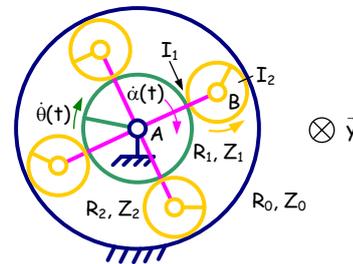
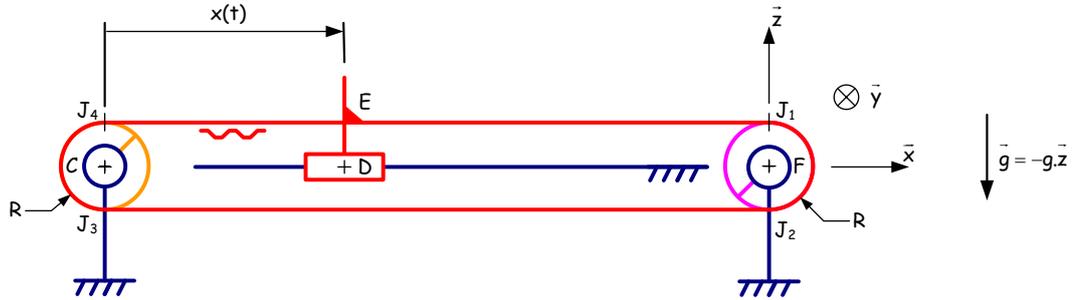
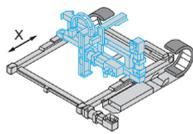
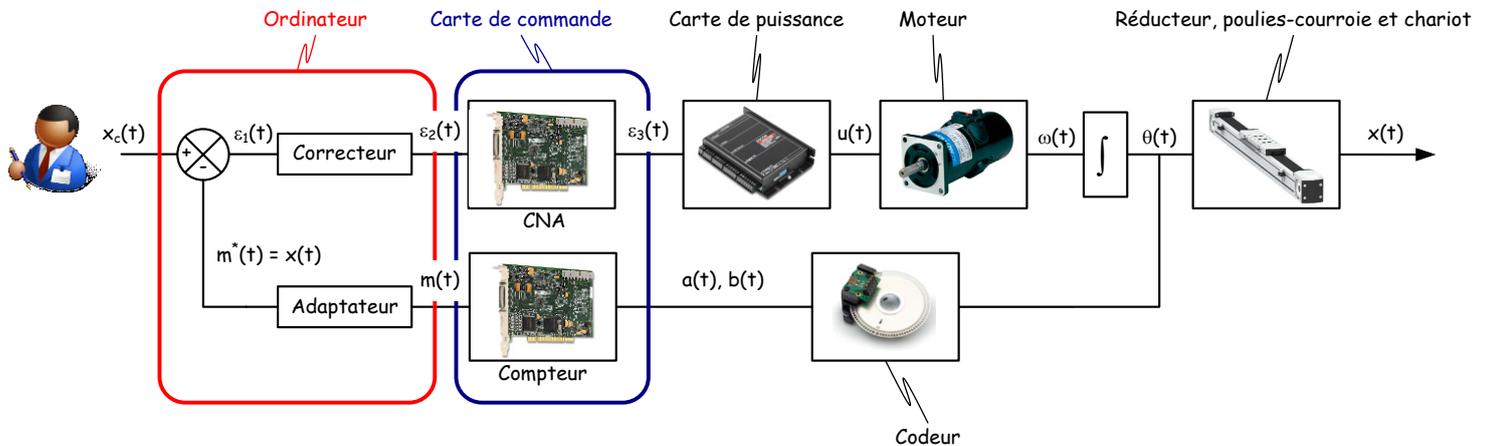


Schéma d'ensemble :





Le schéma ci-dessous met en évidence l'organisation structurelle et fonctionnelle des différents composants nécessaires à la mise en œuvre de l'asservissement de position.



### Fonction de la carte de commande :

#### Coté acquisition :

- Acquérir les deux signaux  $a(t)$  et  $b(t)$  en quadrature de phase venant du codeur incrémental.
- Compter ou décompter les impulsions  $a(t)$  et  $b(t)$  reçues pour élaborer un signal numérique  $m(t)$  en incréments image de la position linéaire  $x(t)$  du chariot.
- Transmettre le résultat de ce comptage  $m(t)$  à l'ordinateur.

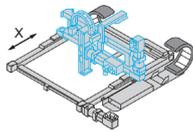
#### Coté génération

- Recevoir le signal "écart corrigé"  $\varepsilon_2(t)$  provenant de l'ordinateur
- Elaborer la tension analogique  $\varepsilon_3(t)$  par conversion numérique analogique de  $\varepsilon_2(t)$

Nota : La carte de commande ne se comporte qu'en interface entre le PC et la partie mécanique : ce n'est pas elle qui effectue les calculs de commande d'axe (adaptation, soustraction, correction).

### Fonction de l'ordinateur :

- Acquérir la consigne  $x_c(t)$  de l'utilisateur (entrée directement en mm par l'utilisateur).
- Adapter le signal de mesure  $m(t)$  en incréments en signal  $m^*(t) = x(t)$  en mm : c'est l'équivalent du bloc adaptateur que l'on rencontre souvent devant le soustracteur. Plutôt que d'adapter la consigne, c'est ici la mesure qui est adaptée.
- Soustraire le signal  $m^*(t) = x(t)$  au signal de consigne  $x_c(t)$  pour obtenir l'écart  $\varepsilon_1(t)$
- Appliquer un algorithme de correction pour transformer l'écart  $\varepsilon_1(t)$  en écart corrigé  $\varepsilon_2(t)$

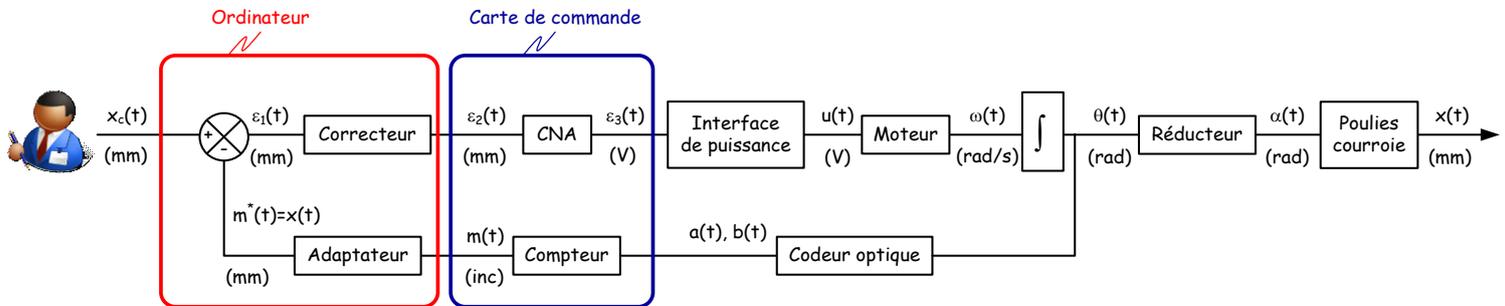


Fonction de la carte de puissance :

La carte utilisée ici est un servo-amplificateur qui peut intégrer en interne une boucle de courant (avec un correcteur PI) et/ou une boucle de vitesse (aussi avec correcteur PI). Ici cette carte n'est utilisée qu'en mode "variateur de vitesse" : les boucles internes de courant et de vitesse sont désactivées. Le terme "servo" n'est donc plus tellement justifié dans notre application. Cette carte de puissance est aussi indifféremment désignée sous les vocables "variateur de vitesse" ou "interface de puissance".

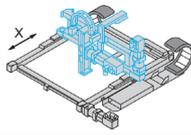
La carte de puissance est configurée en gain pur entre le signal  $\varepsilon_3(t)$  et  $u(t)$ .

On travaille en boucle fermée avec les signaux suivants dans les unités indiquées :

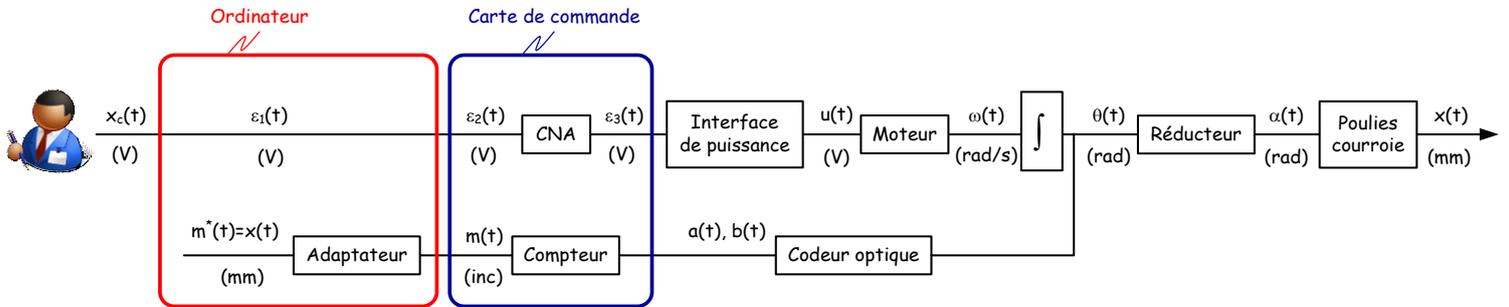


Signaux	Unités
$m(t)$	incréments
$\varepsilon_3(t), u(t)$	volts
$\omega(t)$	rad/s
$\theta(t), \alpha(t)$	rad
$x(t)$	mm (réels)
$x_c(t), m^*(t), \varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)$	mm (dans l'ordinateur *)

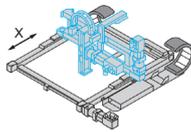
(\*) On pourrait aussi prendre le point de vue de considérer que le signal  $\varepsilon_2(t)$  est en volts. Dans tous les cas, on est dans l'ordinateur, les signaux sont ici codés en virgule flottante sur 8 octets (IEEE 64 bits). Il n'y a pas d'unités, on pourrait parler en bits ou en incréments mais on choisira ici de tout exprimer en mm ou encore dans toute autre unité que l'on veut bien imaginer et qui nous permettra de faciliter l'analyse des signaux (des %, des rapports cycliques, des volts, des mm, des incréments...).



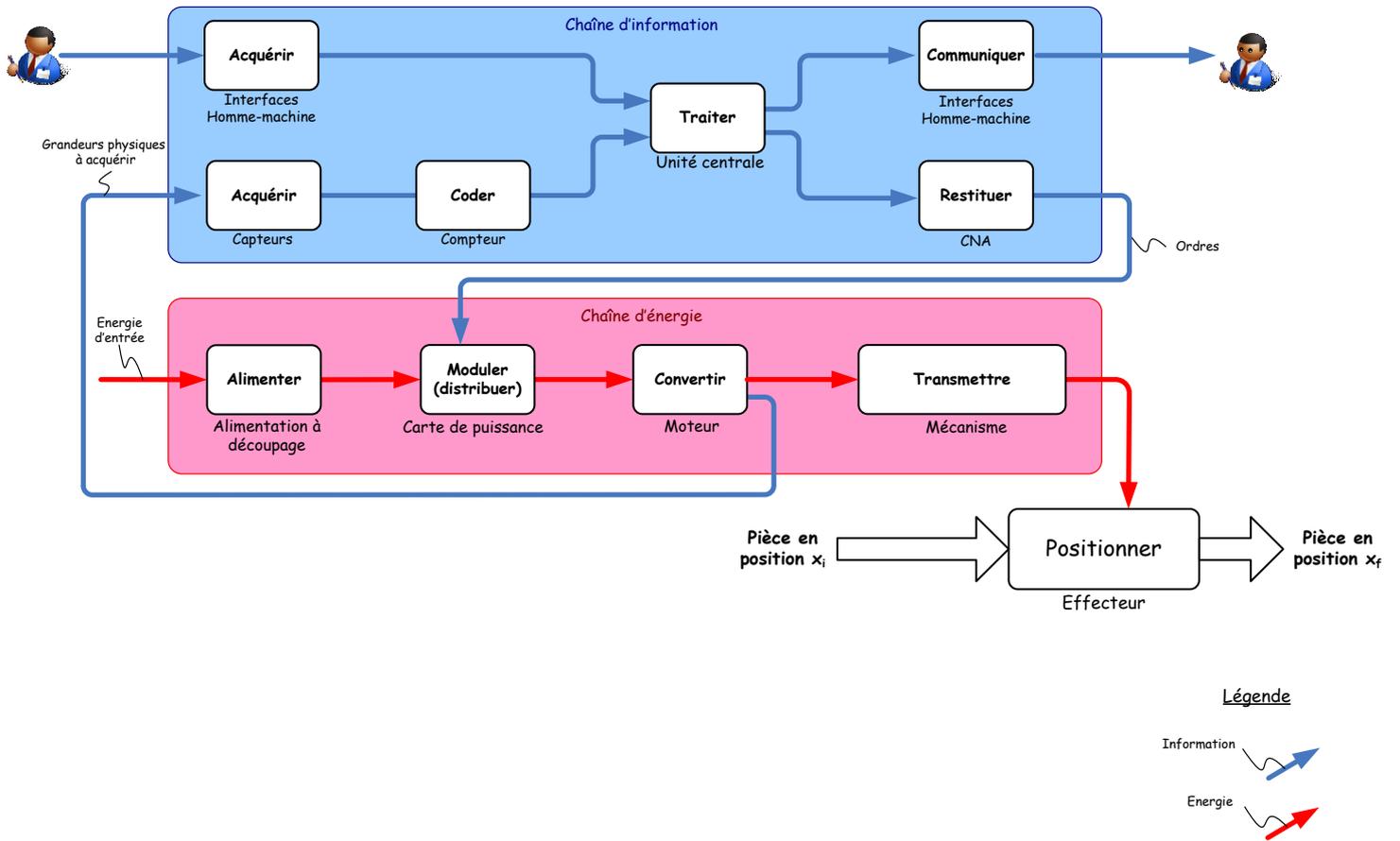
Lorsqu'on se placera en boucle ouverte, ce sera plus pratique de considérer que  $x_c(t) = \varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t)$  et de considérer que ces trois signaux sont des volts :

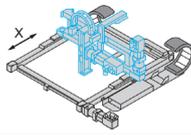


Signaux	Unités
$m(t)$	incréments
$x_c(t), \varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t), \varepsilon_3(t), u(t)$	volts
$\omega(t)$	rad/s
$\theta(t), \alpha(t)$	rad
$x(t)$	mm (réels)
$m^*(t)$	mm (dans l'ordinateur)



Le schéma de la chaîne fonctionnelle résume l'ensemble de ce qui a été dit :



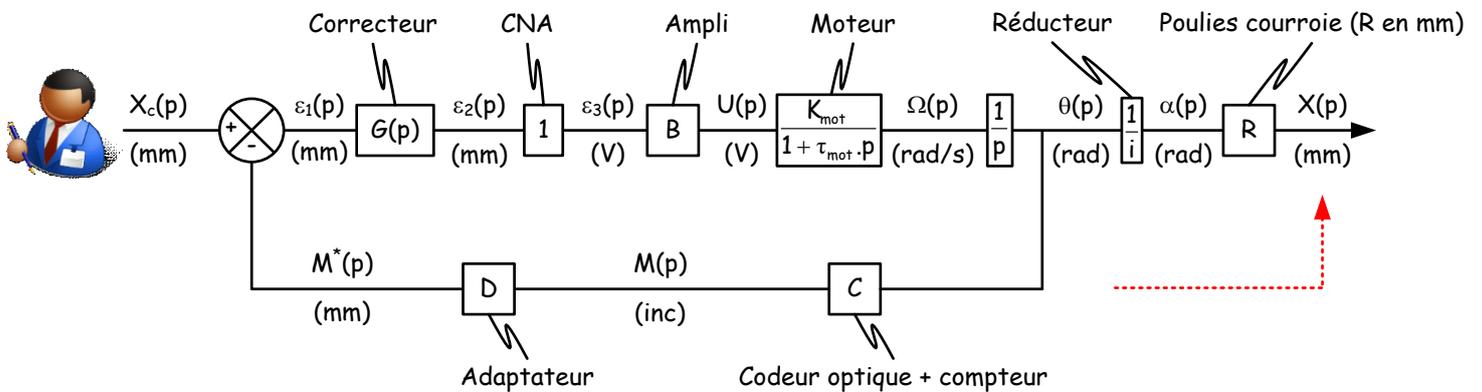


# Modèle pour commencer

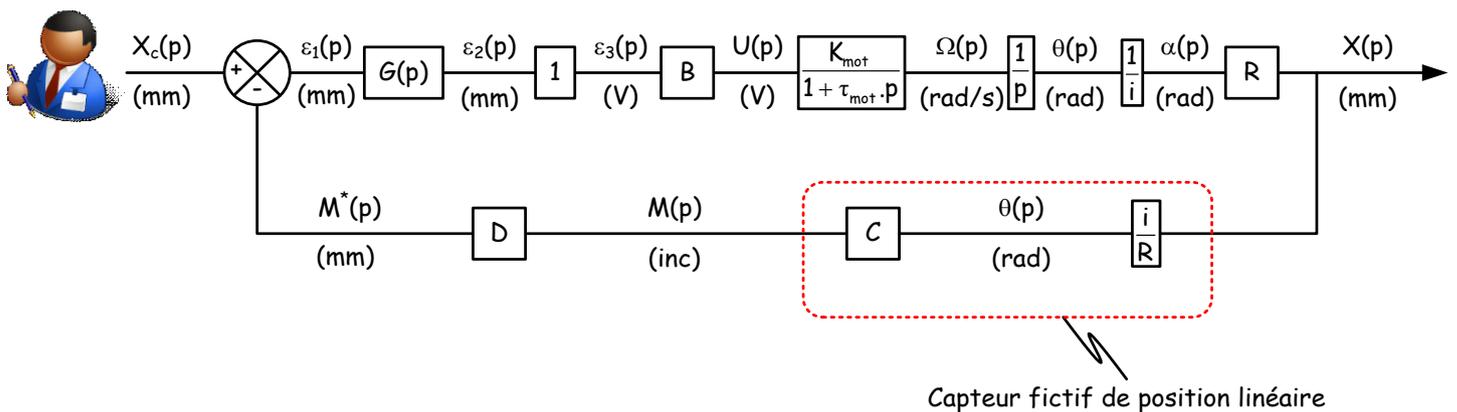
[Ctrl + clic pour revenir au sommaire](#)

**Hypothèses générales** : Modèle linéaire, non perturbé, constante de temps électrique du moteur négligée devant la constante de temps mécanique.

Voici la modélisation servant de point de départ :



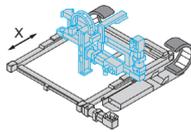
En modifiant le point de piquage du codeur, on obtient le schéma :



Cette transformation fait apparaître un capteur fictif de position linéaire de gain  $\frac{i \cdot C}{R}$ .

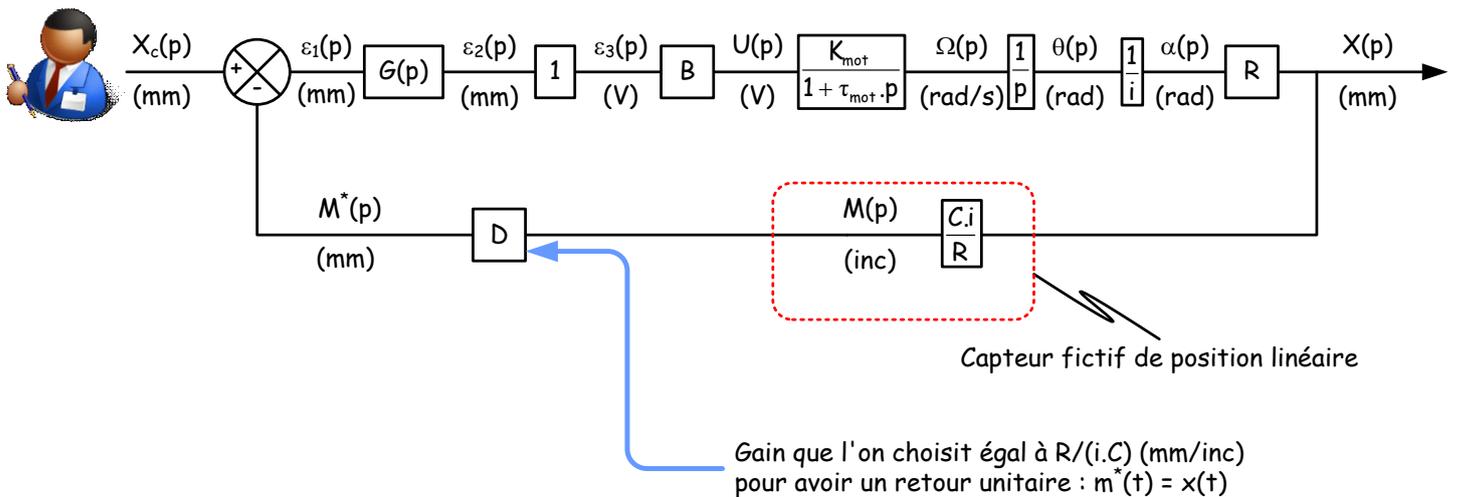
$C = 1000$  points par tour décodé en  $\times 4$  (on compte tous les fronts, montants et descendants, des deux canaux A et B du codeur) soit 4000 incréments par tour de moteur ou 637 incréments/rad

Le gain  $\frac{i \cdot C}{R}$  vaut 77.4 incréments par mm sur Control'X.

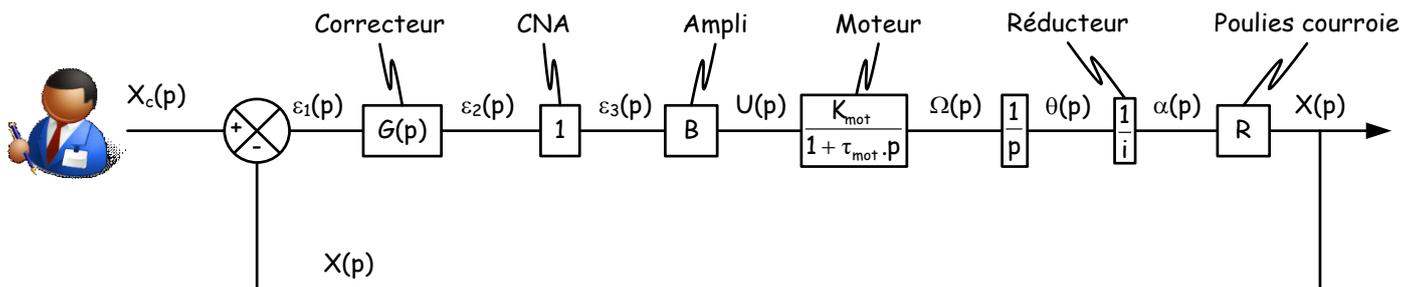


Il suffit maintenant de choisir la valeur du gain  $D$  de façon à rendre le retour unitaire : il faut choisir  $D = \frac{R}{i.C}$ . Cette adaptation est un calcul effectué par le processeur du PC.

Le gain  $D$  vaut  $12.9 \mu\text{m}$  par incrément sur Control'X : c'est la résolution du capteur ramené sur le chariot.

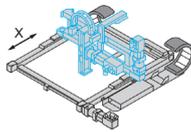


On obtient alors le schéma à retour unitaire :

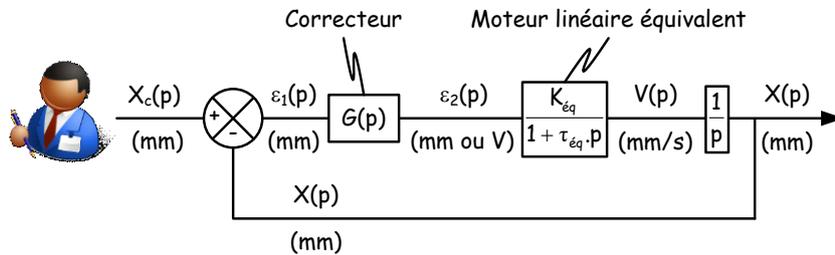


**Nota :** Le gain  $C$  du capteur n'intervenant plus dans la boucle ouverte, il n'aura aucune influence sur le comportement dynamique de l'asservissement. Les gains  $i$  et  $R$  eux influenceront la dynamique de l'asservissement.

Cela n'aurait pas été le cas si l'adaptateur avait été placé devant le soustracteur.



En regroupant tous les blocs de la chaîne directe mis à part le correcteur, on obtient un "moteur linéaire équivalent" : Son entrée  $\varepsilon_2(t)$  est en volts et sa sortie  $v(t)$  en mm/s ou  $x(t)$  en mm.



En commençant avec un correcteur proportionnel  $G(p) = G$ , on a :

$$H_{bo}(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon_1(p)} = \frac{G \cdot K_{\acute{e}q}}{p \cdot (1 + \tau_{\acute{e}q} \cdot p)} \quad \text{où } K_{\acute{e}q} = \frac{B \cdot K_{\text{mot}} \cdot R}{i} \quad \text{et } \tau_{\acute{e}q} = \tau_{\text{mot}}$$

La boucle ouverte est de classe 1 et a un gain de boucle,  $K_{BO} = G \cdot K_{\acute{e}q} = \frac{G \cdot B \cdot K_{\text{mot}} \cdot R}{i}$

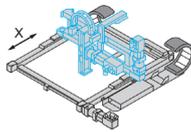
$$\text{On en déduit } H_{bf}(p) = \frac{X(p)}{X_c(p)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{G \cdot K_{\acute{e}q}} \cdot p + \frac{\tau_{\acute{e}q}}{G \cdot K_{\acute{e}q}} \cdot p^2} = \frac{K_{bf}}{1 + \frac{2 \cdot \zeta_{bf}}{\omega_{nbf}} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_{nbf}^2}}$$

$$\text{où } \begin{cases} K_{bf} = 1 \\ \zeta_{bf} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{G \cdot K_{\acute{e}q} \cdot \tau_{\text{mot}}}} \\ \omega_{nbf} = \sqrt{\frac{G \cdot K_{\acute{e}q}}{\tau_{\text{mot}}}} \end{cases}$$

**Nota** : Le choix de l'unité de  $x(t)$  en mm a une conséquence importante sur le gain de boucle ouverte : il le multiplie par 1000. Si l'unité choisie avait été le mètre, ce gain de boucle aurait été 1000 fois plus petit. Avec ce choix d'unité en mm, le gain  $G$  du correcteur proportionnel par exemple est à choisir dans l'intervalle [0.1 et 5] selon les performances visées. Pour obtenir le même comportement, ce gain aurait dû être choisi dans l'intervalle [100, 5000] si l'unité de  $x(t)$  avait été le mètre.

Avec un gain de correcteur proportionnel  $G = 1$ , et un gain  $B = 4$ , on a une tension moteur de 40 V pour 10 mm d'écart avec les unités choisies en mm.

On aurait une tension moteur de 40 mV pour ce même écart de 10 mm = 0.01 m si l'unité de  $x(t)$  avait été le mètre. Evidemment le comportement de la boucle fermée n'aurait pas été le même.



**Valeurs numériques pour alimenter le modèle :**

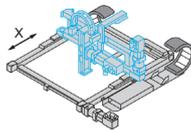
- $B = 4$
- $\tau_{\text{mot}} = 22 \text{ ms}$
- $R = 24.67 \text{ mm}$
- $i = 3$
- $K_{\text{mot}} = 4 \text{ (rad/s)/V}$

**Application numérique :** Il faut laisser R en mm dans les calculs, on trouve :

$$K_{\text{éq}} = 132 \text{ (mm/s)/V}$$

$$\tau_{\text{éq}} = 0.022 \text{ s}$$

Par exemple avec un gain  $G = 1$ , on a  $\left\{ \begin{array}{l} \zeta_{\text{bf}} = 0.3 \\ \omega_{\text{h bf}} = 77 \text{ rad/s} \end{array} \right.$



On donne ci-dessous les diagrammes fréquentiels de la boucle ouverte non corrigée :

$$H_{\text{bo-non corrigée}}(p) = \frac{K_{\text{éq}}}{p \cdot (1 + \tau_{\text{éq}} \cdot p)} = \frac{\frac{B \cdot K_{\text{mot}} \cdot R}{i}}{p \cdot (1 + \tau_{\text{mot}} \cdot p)} = \frac{132}{p \cdot (1 + 0.022 \cdot p)}$$

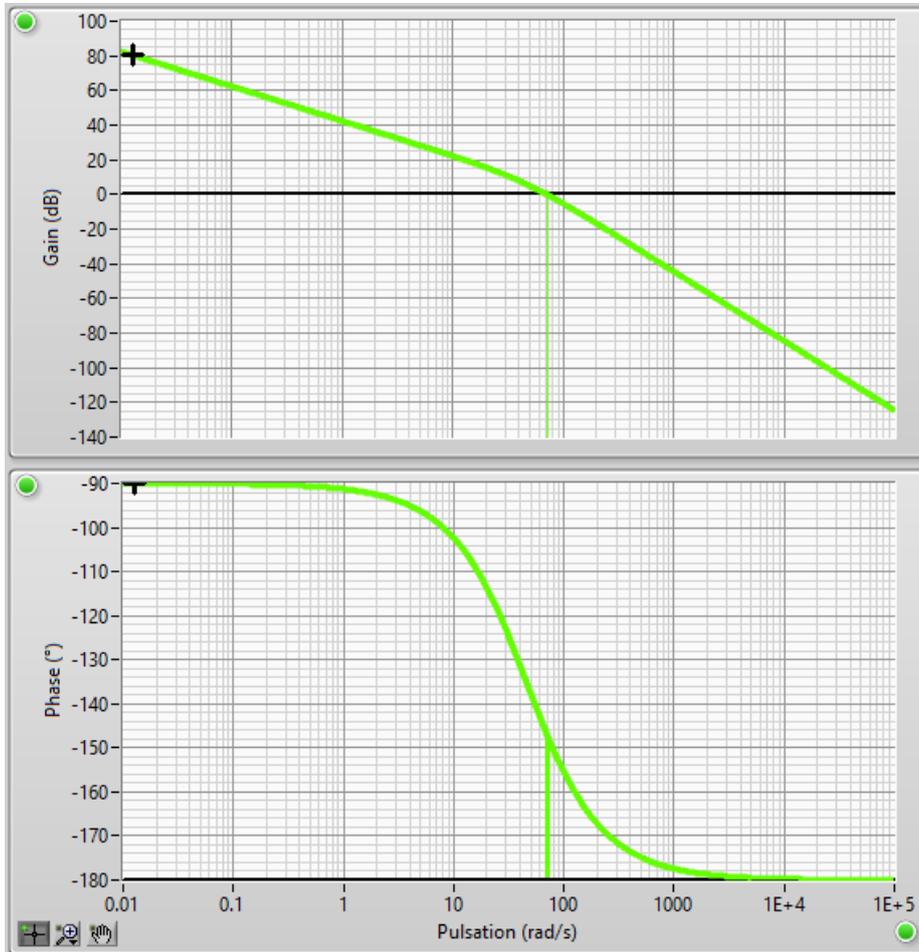


Diagramme de Bode de la boucle ouverte non corrigée

Hbo non corrigée

Pulsation de coupure à 0 dB (rad/s) :

Pulsation à la phase -180° (rad/s) :

Marge de gain (dB) :

Marge de phase (°) :

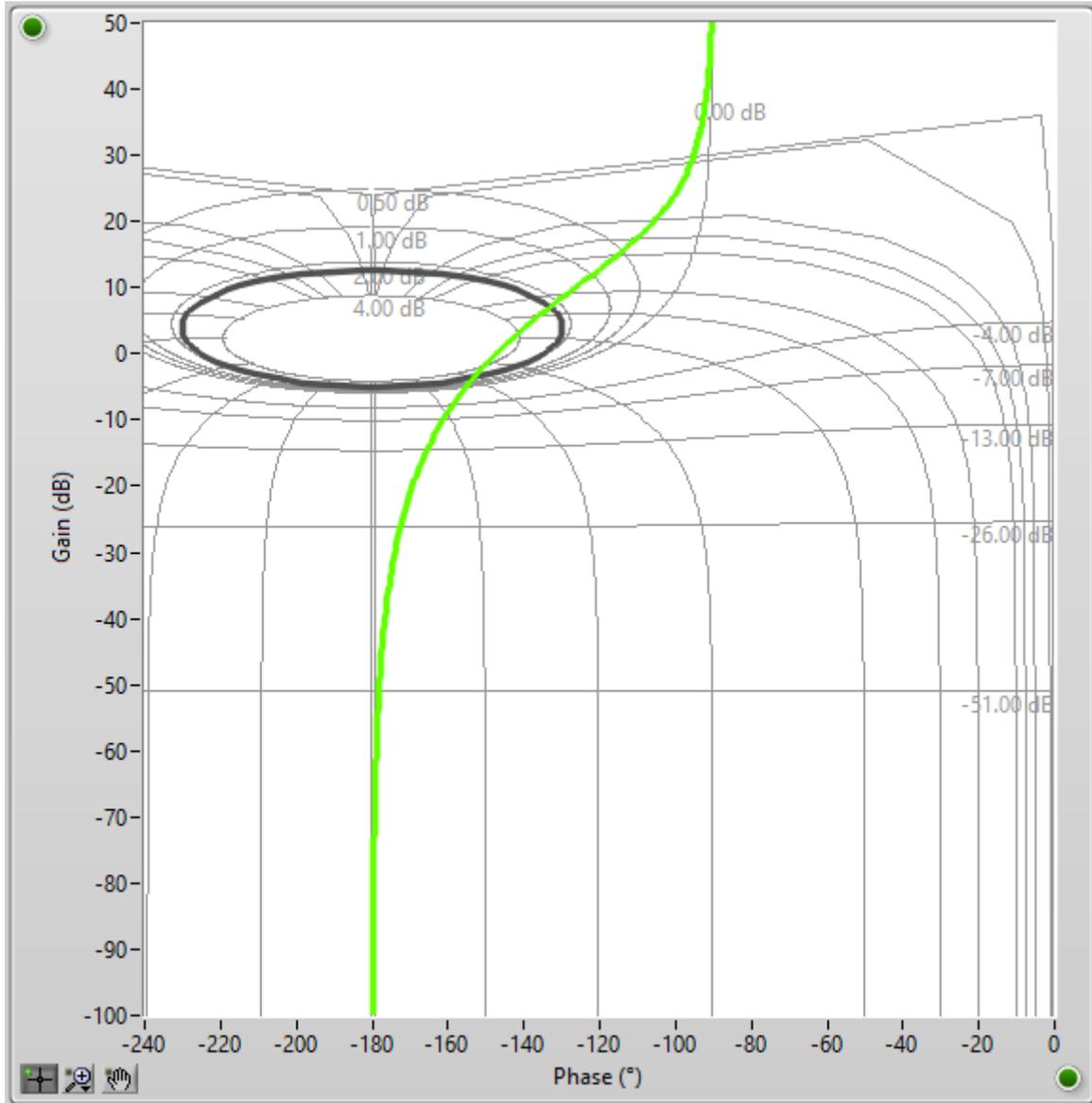
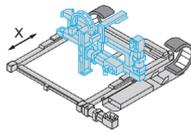


Diagramme de Black de la boucle ouverte non corrigée

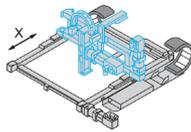
Hbo non corrigée

Pulsation de coupure à 0 dB  
(rad/s) :

Pulsation à la phase -180°  
(rad/s) :

Marge de gain (dB) :

Marge de phase (°) :



**Prévision de l'influence du gain  $G$  sur les performances : Analyse basée sur la boucle ouverte**

$$H_{bo}(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon_1(p)} = \frac{G \cdot K_{\acute{e}q}}{p \cdot (1 + \tau_{\acute{e}q} \cdot p)}$$

Performance	Effet d'une augmentation du gain de correcteur $G$
<b>Stabilité</b>	Les marges de stabilité sont toujours positives, $G$ n'a pas d'influence sur la stabilité de la BF.
<b>Amortissement</b>	La marge de gain est toujours infinie, la marge de phase diminue lorsque le gain $G$ augmente : L'amortissement diminue.
<b>Rapidité</b>	La pulsation de coupure à 0 dB de la boucle ouverte augmente lorsque le gain $G$ augmente : la rapidité augmente (au sens vivacité ou temps de montée).
<b>Précision</b>	La classe vaut 1, l'asservissement est précis pour une entrée indicielle. L'écart de poursuite pour une entrée en rampe diminue lorsque le gain $G$ augmente : la précision s'améliore.

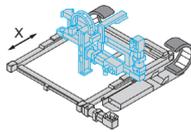
Prévision qualitative du comportement en boucle fermée par analyse de la fonction de transfert en boucle ouverte

**Prévision de l'influence du gain  $G$  sur les performances : Analyse basée sur la boucle fermée**

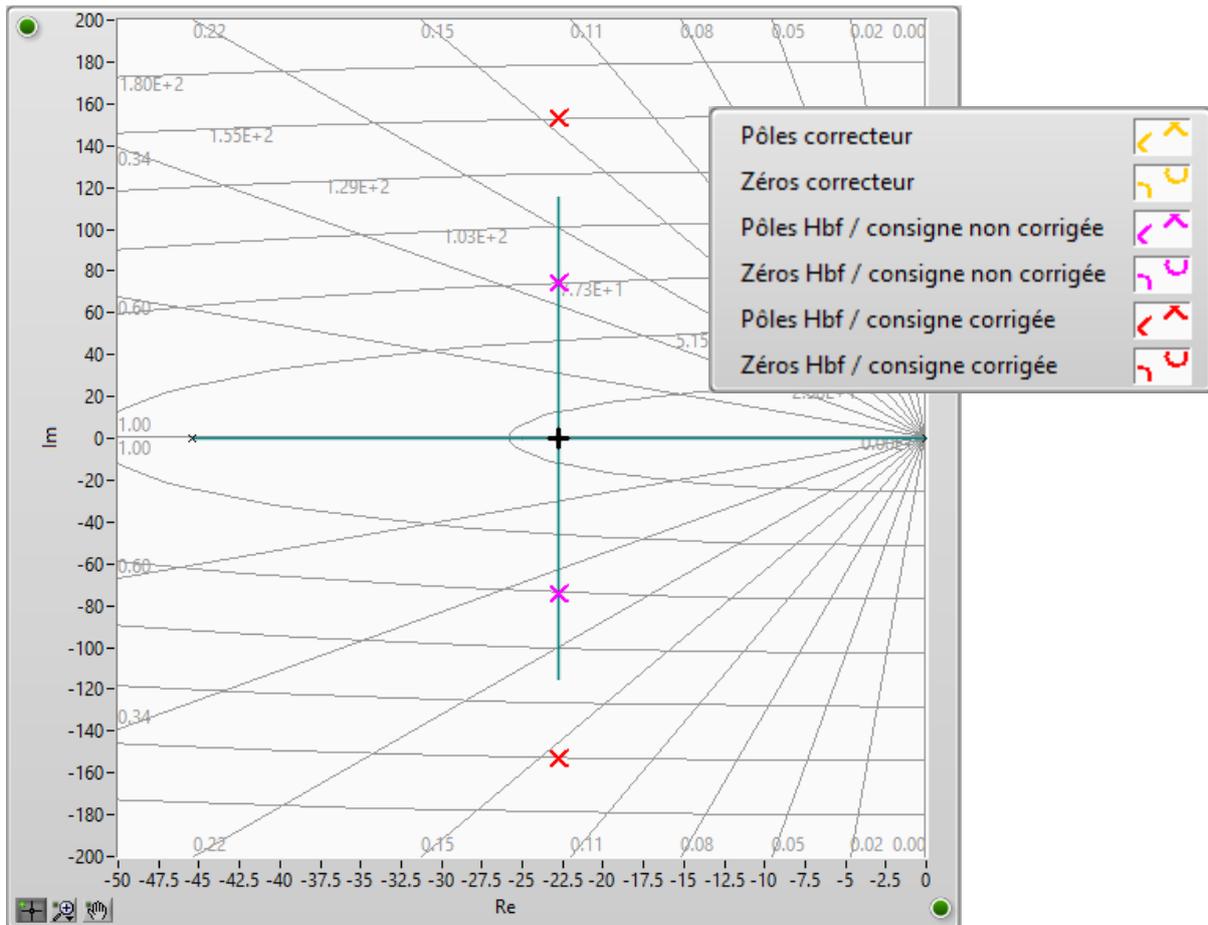
$$H_{bf}(p) = \frac{X(p)}{X_c(p)} = \frac{K_{bf}}{1 + \frac{2 \cdot z_{bf}}{\omega_{nbf}} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_{nbf}^2}} \quad \text{où : } \begin{cases} K_{bf} = 1 \\ \zeta_{bf} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{K_{bo} \cdot \tau_{mot}}} \\ \omega_{nbf} = \sqrt{\frac{K_{bo}}{\tau_{mot}}} \end{cases} \quad \text{et } K_{bo} = G \cdot \frac{B \cdot K_{mot} \cdot R}{i}$$

Performance	Effet d'une augmentation du gain de correcteur $G$
<b>Stabilité</b>	Les pôles de la boucle fermée sont toujours à partie réelle strictement négative (tous les coefficients du dénominateur sont strictement de même signe) : L'asservissement est toujours stable.
<b>Amortissement</b>	$\zeta_{bf}$ diminue lorsque $G$ augmente : l'amortissement diminue.
<b>Rapidité</b>	La pulsation propre non amortie $\omega_{nbf}$ augmente lorsque le gain $G$ augmente : La rapidité (au sens vivacité) augmente avec $G$ .
<b>Précision</b>	$K_{bf} = 1$ : l'asservissement est précis pour des entrées indicielles. (Raisonnement valable car retour est unitaire)

Prévision qualitative du comportement en boucle fermée par analyse de la fonction de transfert en boucle fermée

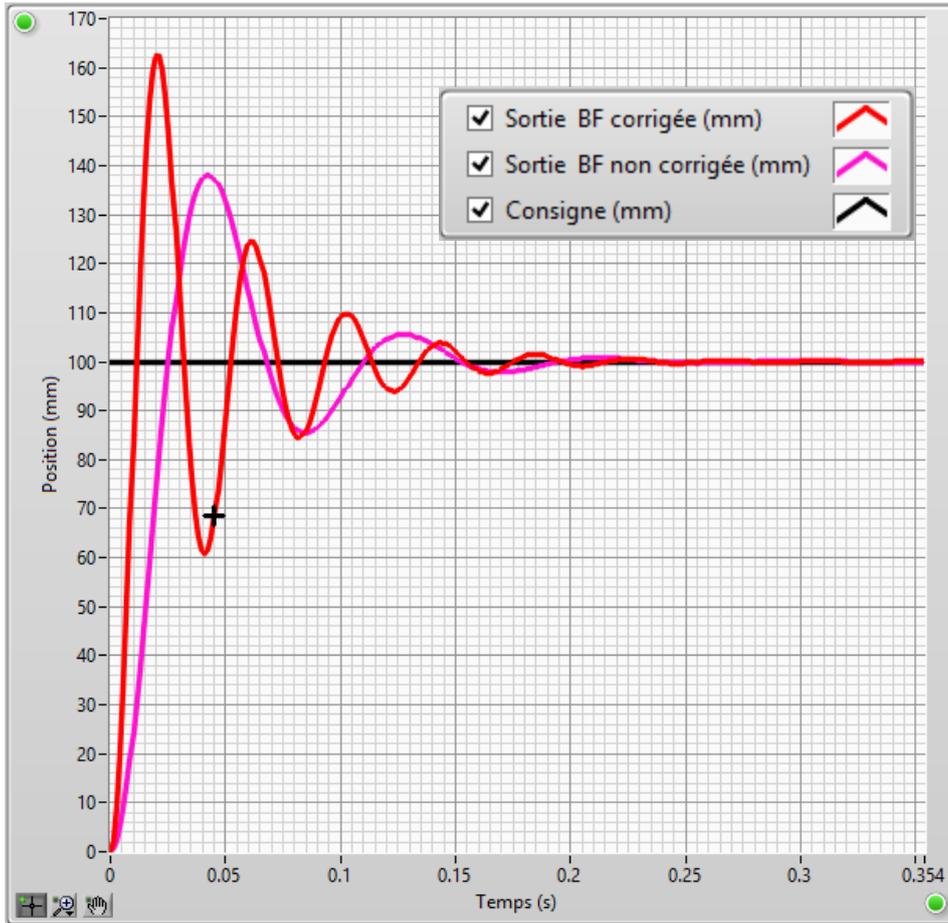
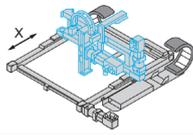


**Nota :** Lorsque  $\zeta_{bf} < 1$  (à partir de  $G > 0.09$  avec notre modèle linéaire) les modes du second ordre sont complexes conjugués. La réponse temporelle est alors enveloppée par des exponentielles du type  $\pm e^{-\zeta_{bf} \omega_{hbf} \cdot t} = e^{-\frac{1}{2 \cdot \tau_{mot}} \cdot t}$ . Le gain  $G$  n'apparaissant pas dans ces exponentielles, le temps de réponse à 5 % est donc quasiment indépendant de  $G$ . Il vaut environ  $6 \cdot \tau_{mot} \approx 132$  ms au maximum. En effet, l'instant auquel les exponentielles enveloppes rentrent dans la bande à  $\pm 5\%$  est un majorant du temps de réponse à 5%.



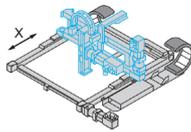
Lieu des pôles de la boucle fermée : En **rose** les pôles de la BF non corrigée ( $G = 1$ ), en **rouge** les pôles de la BF corrigée par un gain  $G = 4$ , en **vert** le lieu d'Evans.

Les pôles sont sur une même verticale d'abscisse  $-22.7$  : constante de temps associée  $\tau = 2 \cdot \tau_{mot} = 1/22.7 = 44$  ms : le transitoire disparaît à 95% en  $3 \cdot \tau = 132$  ms.



Réponse indicielle unitaire : En **rose** la réponse de la boucle fermée non corrigée ( $G = 1$ ), en **rouge** la réponse de la boucle fermée corrigée par un gain  $G = 4$ .

Le temps de réponse à 5% vaut 101 ms pour la boucle fermée non corrigée et 107 ms pour la BF corrigée. Le système corrigé est plus vif et moins amorti comme prévu.



## Limites du modèle

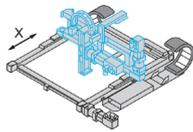
[Ctrl + clic pour revenir au sommaire](#)

Avec ce modèle très simple, des écarts modèle-réel interviennent à plusieurs niveaux. On a à priori par ordre d'importance décroissante les justifications suivantes :

- Saturations
- Perturbations négligées
- L'échantillonnage
- Dynamique du variateur de vitesse négligée
- Constante de temps électrique du moteur négligée devant sa constante de temps mécanique
- La quantification
- Le caractère non temps réel du traitement effectué par le PC
- Le PWM

Disons le tout de suite, comme nous allons le voir en conclusion, les deux sources d'écart principales sont :

- La saturation du CNA de la carte de commande à  $\pm 10$  V
- Les perturbations négligées : qu'elles soient du type frottements secs ou visqueux

**Écarts modèle-réel : du côté du PC et de la carte de commande**

Non continuité : l'échantillonnage

**[Ctrl + clic pour revenir au sommaire](#)**

A chaque période d'échantillonnage, le PC envoie une requête à la carte de commande pour qu'elle effectue une conversion analogique numérique. Un bloqueur d'ordre 0 est utilisé en sortie de convertisseur numérique analogique.

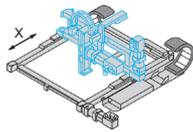
Le modèle mis en place est un modèle continu, alors que le système réel est échantillonné puisque le traitement est effectué à intervalles réguliers par le processeur du PC.

A correcteur donné, un système échantillonné est toujours moins amorti qu'un système continu. La période d'échantillonnage peut en effet être vue comme un retard qui forcément dégrade les marges de stabilité.

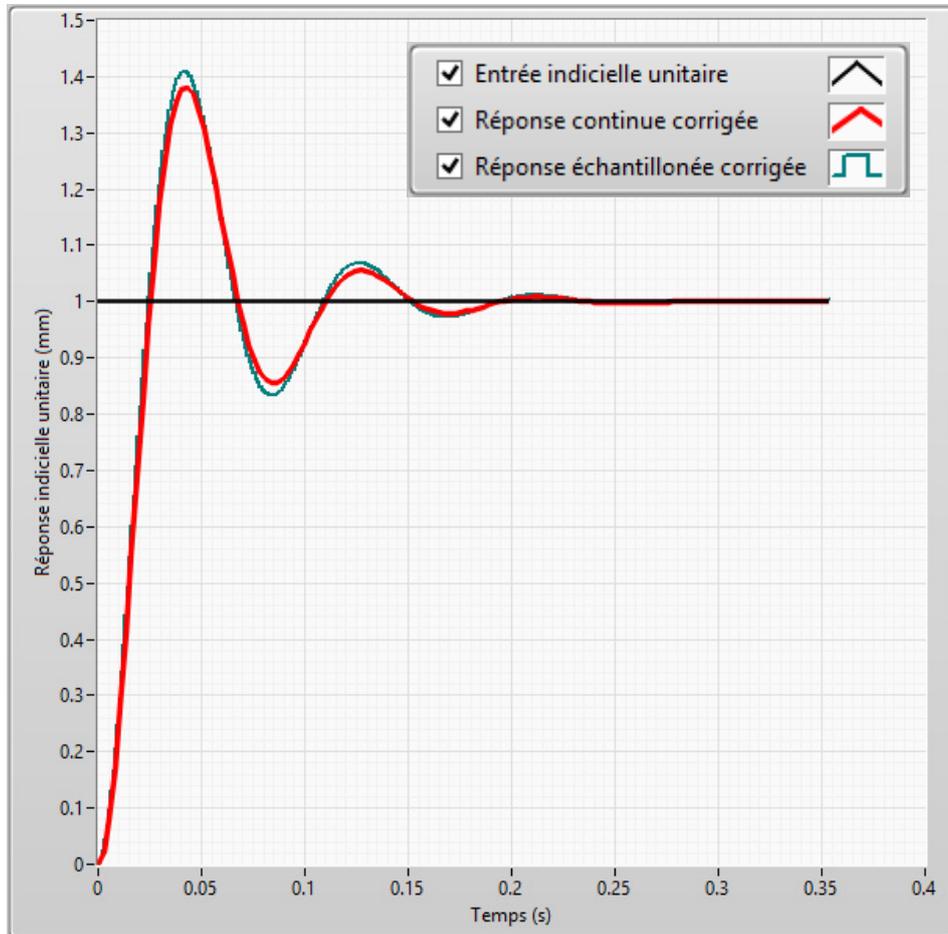
La période d'échantillonnage par défaut de Control'Drive est fixée à 1 ms. Cette période d'échantillonnage est quasiment toujours respectée (Une diode rouge s'allume en bas à droite de la barre d'état lorsque ce n'est pas le cas). Dans les faits, pour une période d'échantillonnage de 1 ms, aucune différence notable dans le comportement n'est à envisager entre le modèle continu et le modèle échantillonné.

Voir sous Control'Drive dans l'onglet "Synthèse correcteur", sous-onglet "Discretisation correcteur" pour traiter ce point de façon exhaustive.

Sous Matlab-Simulink, la période d'échantillonnage peut descendre à 0.05 ms (20 kHz). Par défaut, elle est réglée à 0.1 ms pour pouvoir observer des dynamiques rapides comme l'effet de la constante de temps électrique du moteur. A ces fréquences, l'effet de l'échantillonnage n'a strictement aucune influence sur les signaux observés et les modèles mis en place peuvent clairement être du type continu.

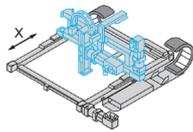


On compare ci-dessous les réponses indicielles unitaires de notre système sur la base d'un modèle continu et d'un modèle échantillonné (transformée en z) :

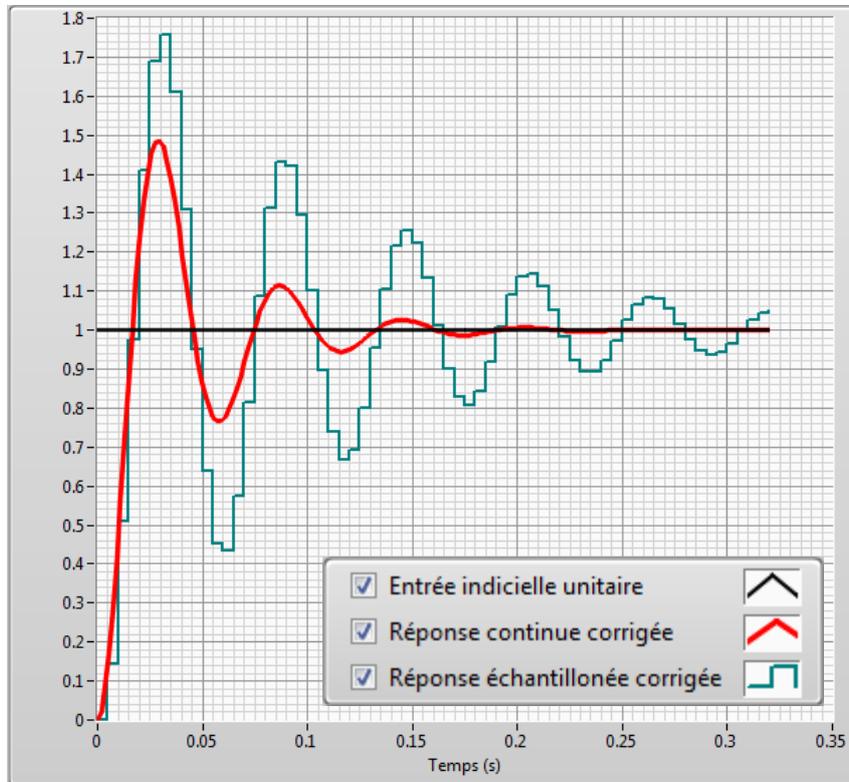


Réponse indicielle théorique avec un modèle continu (rouge) et un modèle échantillonné (vert) pour une période d'échantillonnage de 1 ms et un gain de correcteur  $G = 1$ .

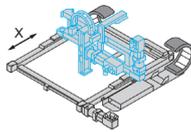
Conclusion : Avec une période d'échantillonnage de 1 ms et un gain de correcteur  $G = 1$ , l'erreur commise en travaillant sur un modèle continu alors que le système réel est échantillonné semble acceptable.



Avec un gain de correcteur plus important (système plus vif) et une période d'échantillonnage mal choisie, le modèle continu pourra rapidement ne plus donner d'indications valables :



Réponse indicielle théorique avec un modèle continu (rouge) et un modèle échantillonné (vert) pour une période d'échantillonnage de 5 ms et un gain de correcteur  $G = 2$ .



**Ecart modèle-réel : du côté du PC**

Codage de l'information

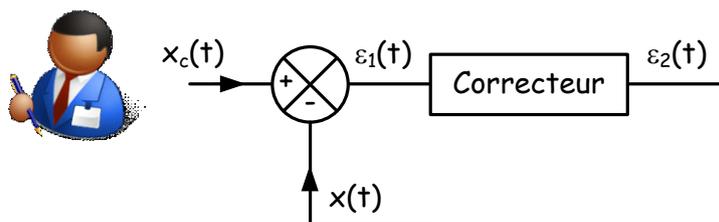
**Ctrl + clic pour revenir au sommaire**

Le codage de l'information en virgule flottante sur 64 bits peut paraître exagérément précis mais le temps de calcul qui en découle n'est pas un facteur limitant la période d'échantillonnage de Control'Drive.

La période d'échantillonnage est réglée par défaut à 1 ms sur Control'Drive. C'est la valeur minimale.

Cette période est plutôt limitée non pas par la carte de commande qui autoriserait un échantillonnage jusqu'à 50 kHz mais par la gestion qui en est faite sous le système d'exploitation Windows.

Les signaux ci-dessous sont donc codés en virgule flottante sur 64 bits :



L'explication qui suit est tirée intégralement d'un polycopié de M Vergé, enseignant chercheur en automatique :

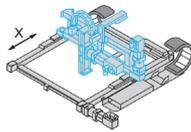
**Influence de la représentation des nombres**

Tout ordinateur utilise une représentation particulière des nombres. Certains ne travaillent qu'en nombres entiers, d'autres acceptent la représentation des nombres flottants. Plusieurs formats sont classiquement adoptés (norme IEEE) : par exemple un format 32 bits ou un format 64 bits est disponible en langage C. La précision de cette représentation provoque un comportement plus ou moins précis de la programmation du correcteur.

Considérons par exemple le correcteur ayant pour entrée  $\epsilon_1(k)$  et pour sortie  $\epsilon_2(k)$  à appliquer au bloqueur.

Supposons que l'équation récurrente du correcteur soit  $\epsilon_2(k) = -b.\epsilon_2(k) + \epsilon_1(k) + a.\epsilon_1(k-1)$

Traitons deux cas pour l'entrée  $\epsilon_1(k) = 1$  :

Cas 1 :  $a = -0.9999$  et  $b = -0.9998996$ 

En effectuant les calculs sur un calculateur où les nombres sont représentés sur 64 bits, on obtient :

$$\begin{aligned}\varepsilon_2(0) &= 1 \\ \varepsilon_2(1) &= 0.999\ 999\ 6 \\ \varepsilon_2(2) &= 0.999\ 995\ 9 \\ \varepsilon_2(3) &= 0.999\ 995\ 18 \\ \varepsilon_2(4) &= 0.999\ 994\ 17 \\ \varepsilon_2(\infty) &= 0.996 \text{ pour } k \text{ très grand}\end{aligned}$$

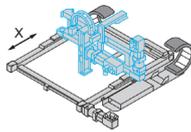
Cas 2 :  $a = -0.999$  et  $b = -0.9999$ 

En effectuant les calculs sur un calculateur où les nombres sont représentés sur 16 bits, on obtient :

$$\begin{aligned}\varepsilon_2(0) &= 1 \\ \varepsilon_2(1) &= 1.000\ 9 \\ \varepsilon_2(2) &= 1.001\ 7 \\ \varepsilon_2(3) &= 1.002\ 6 \\ \varepsilon_2(4) &= 1.003\ 5 \\ \varepsilon_2(\infty) &= 10.002 \text{ pour } k \text{ très grand}\end{aligned}$$

On constate donc que les valeurs calculées sont extrêmement différentes. Cette situation se produit chaque fois que les "pôles et zéros" du correcteur sont proche de 1.

L'ordre du correcteur est le rang du retard en  $\varepsilon_2$  : dans l'exemple précédent, le correcteur est du premier ordre. Pour un correcteur d'ordre élevé, il est conseillé de l'implanter sous forme d'une somme de correcteurs élémentaires du premier ou du second ordre.



### Écarts modèle-réel : du côté du PC

Caractère non temps réel du traitement effectué

**Ctrl + clic pour revenir au sommaire**

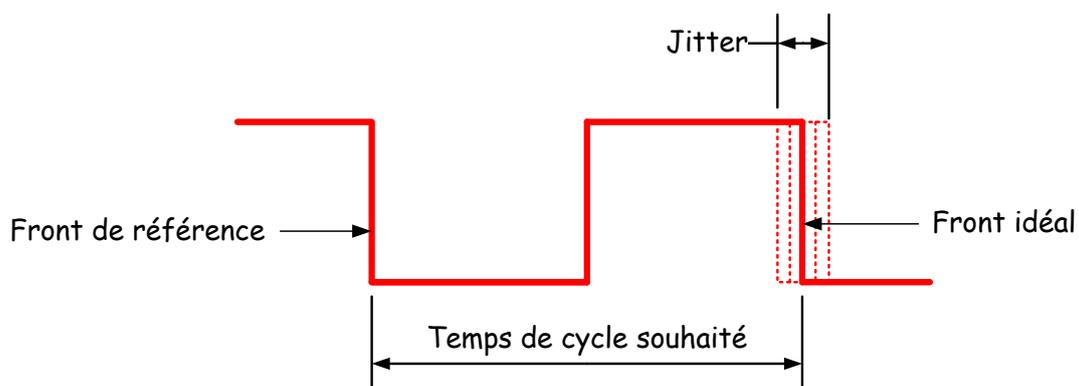
Control'Drive étant un logiciel de commande d'axe tournant dans l'environnement Windows, les calculs effectués peuvent souffrir de problèmes de déterminisme. Une priorité haute est demandée par LabVIEW sur les ressources processeur du PC pour pouvoir effectuer les calculs en temps et en heure. Le but étant d'essayer de respecter la période d'échantillonnage choisie. Mais rien ne peut garantir que Windows n'ira pas par exemple satisfaire une requête de l'antivirus ou une requête du réseau ou toute autre activité. La période d'échantillonnage risque alors de ne plus être satisfaite. Les conséquences pourraient être néfastes au niveau des performances de l'asservissement.

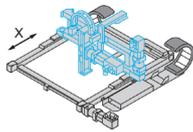
Il faut avoir en mémoire qu'un correcteur numérique (c'est le cas ici) qui utilise des effets dérivé ou intégral utilise des gains dans son équation récurrente qui sont calculés pour une fréquence d'échantillonnage donnée. Le non-respect de la fréquence d'échantillonnage à le même effet que des coefficients d'équation récurrente mal choisis c'est-à-dire le même effet que des gains dérivé et intégral mal choisis bref le même effet qu'un correcteur mal calé. Un pilotage sous un système d'exploitation non temps réel pourrait conduire à des problèmes de comportement dynamique (amortissement insuffisant) ou pire des instabilités.

C'est la raison qui explique que lorsqu'un système à asservir est critique (nucléaire, aéronautique, automobile, usinage etc...), un industriel ne peut pas confier un calcul de commande d'axe à un logiciel qui ne tourne pas sous un système d'exploitation temps réel.

Définissons ici le terme jitter : Le jitter est une fluctuation temporelle : c'est l'écart entre la périodicité réelle d'un signal et la périodicité souhaitée.

Que les calculs soient effectués sous un système d'exploitation temps réel ou non, on aura toujours du jitter. Le propre d'un système d'exploitation temps réel est de garantir un jitter borné.





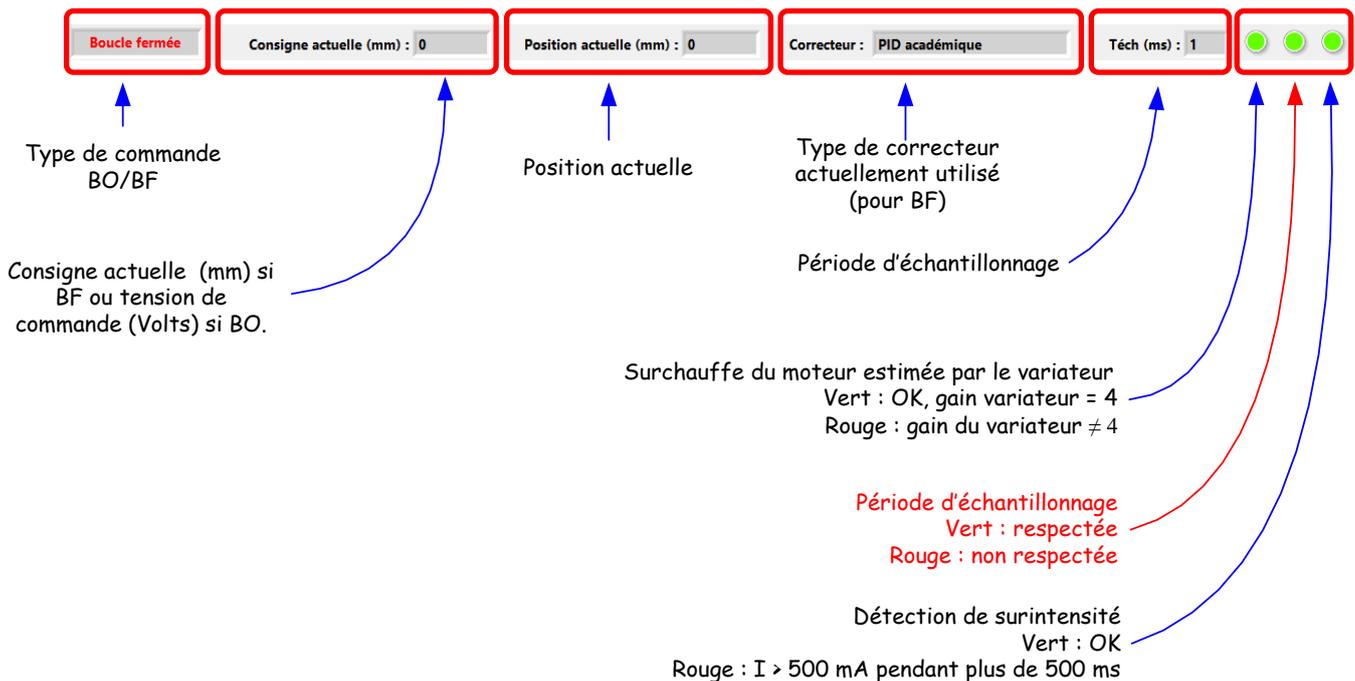
Un jitter borné c'est donc la garantie que chaque tâche sera effectuée à l'instant voulu avec une tolérance donnée.

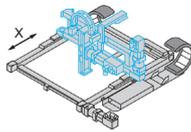
Un pilotage déterministe est un pilotage dont le jitter est borné : le pilotage est aussi qualifié de temps réel déterministe ou plus simplement de temps réel.

**Nota :** Le terme temps réel n'est pas synonyme de rapidité.

Un pilotage temps réel déterministe sous Windows n'est pas possible, l'OS Windows n'étant pas par nature "temps réel".

Sous Control'Drive, on peut vérifier facilement si la période d'échantillonnage est respectée : si la diode de gauche en bas à droite dans la barre d'état passe du vert au rouge, c'est que la période d'échantillonnage n'est pas respectée. Il faut alors l'augmenter : Menu "Paramètres". En général, une période de 1 ms même sous un PC un peu ancien ne pose pas de problème.



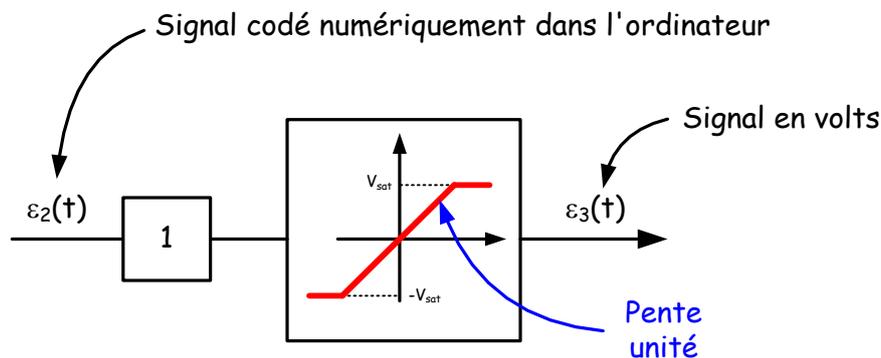


**Écarts modèle-réel : du côté de la carte de commande**

Non linéarité : Saturation de la tension de sortie

**Ctrl + clic pour revenir au sommaire**

Le convertisseur numérique analogique de la carte de commande présente un gain unité mais sature à  $\pm V_{sat} = \pm 10$  V. On a donc  $\varepsilon_3(t) = \varepsilon_2(t)$  avec une linéarité rompue dès que le signal  $\varepsilon_2(t)$  sort de l'intervalle  $[-10, 10]$ .



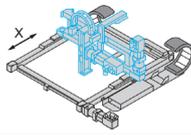
Le signal  $\varepsilon_3(t)$  est homogène à une tension mais le signal  $\varepsilon_2(t)$  est un signal codé dans l'ordinateur, il n'a donc pas à proprement parler d'unité... sauf celle qu'on veut bien imaginer pour faciliter la compréhension des phénomènes. Tout est cependant question de point de vue :

- Imaginer une unité de tension en volts pour  $\varepsilon_2(t)$  peut être intéressant lorsque Control'X est piloté en boucle ouverte
- Imaginer une unité de distance en mm pour  $\varepsilon_2(t)$  peut être intéressant lorsque Control'X est piloté en boucle fermée

En pratique, la carte de commande sature assez souvent et assez longtemps. En particulier, lors de l'utilisation d'un correcteur proportionnel de gain  $G$ , si l'amplitude  $\Delta x_c$  de l'échelon d'entrée multipliée par ce gain  $G$  dépasse 10 V en valeur absolue, la carte de commande sature.

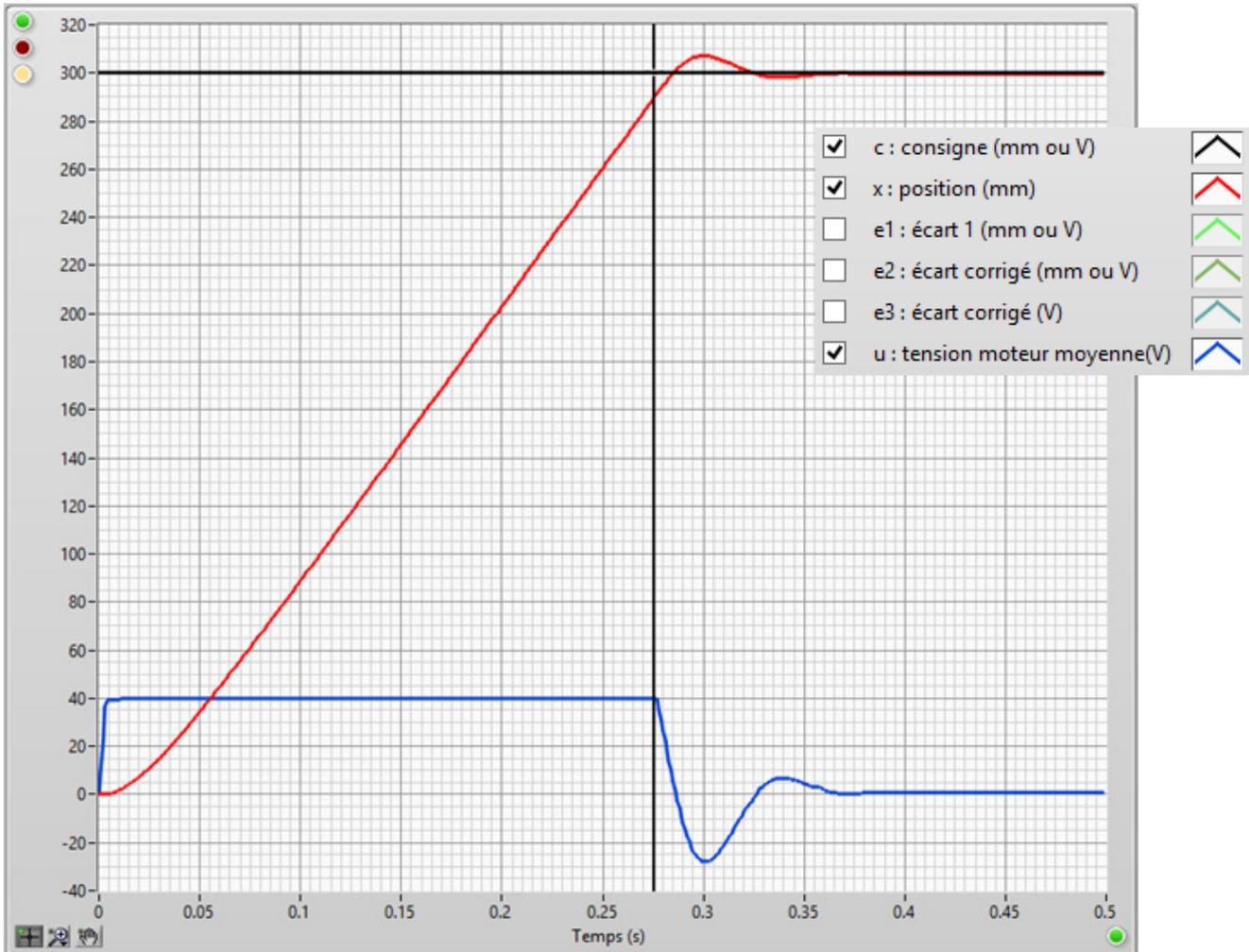
Pour éviter toute saturation (est-ce souhaitable ?) il faut donc choisir des amplitudes d'échelon et des gains  $G$  tels que  $|G \cdot \Delta x_c| \leq 1$ .

En pratique, il n'y a aucun intérêt sauf pédagogique, à chercher à éviter la saturation. Si le déplacement doit être de 300 mm par exemple, il est clair que l'on ne va pas choisir un correcteur (proportionnel pour faire simple) valant  $10/300 \approx 0.03$  alors qu'un "bon" correcteur proportionnel se situe entre 0.5 et 1. Les performances de l'asservissement seraient catastrophiques. La saturation n'est pas forcément un phénomène subi mais doit être vue comme servant à protéger la chaîne d'énergie. Ce qui est certain c'est que la saturation n'arrange pas

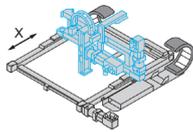


les affaires du scientifique qui préfère que tous les comportements se modélisent par des relations linéaires.

La saturation peut durer très longtemps : Par exemple avec un gain  $G = 1$  et une consigne en échelon de 300 mm, il faudra attendre d'avoir atteint 290 mm pour que le signal  $\varepsilon_2(t)$  descende en dessous de 10 mm et que le CNA cesse de saturer. Pendant la saturation, le système se comporte alors exactement comme si il était en boucle ouverte puisque le moteur est alimenté sous 40 V.

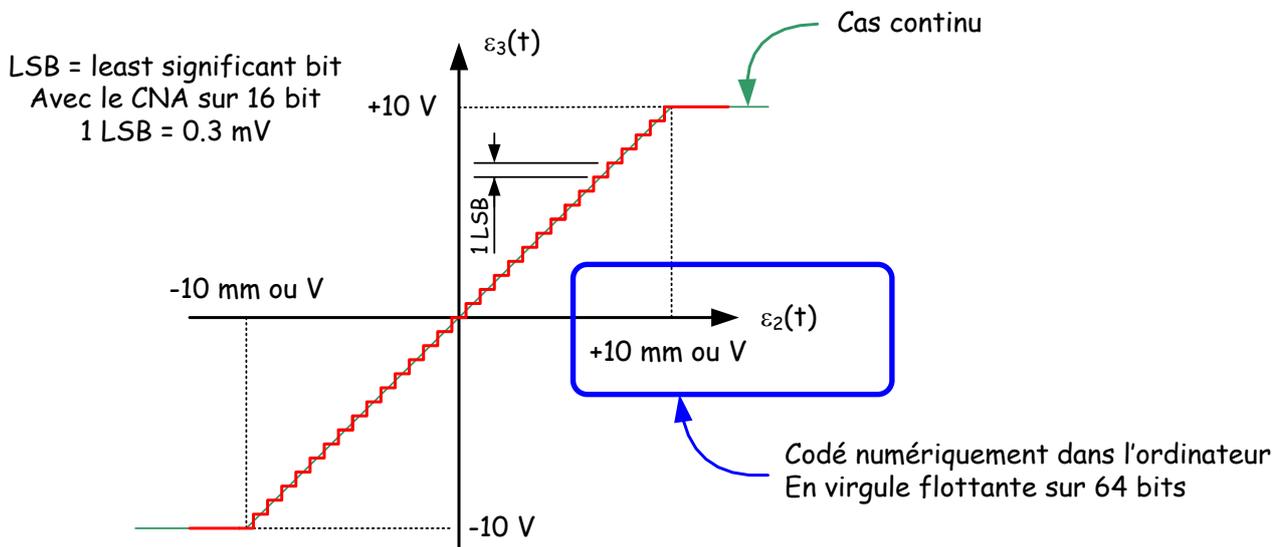
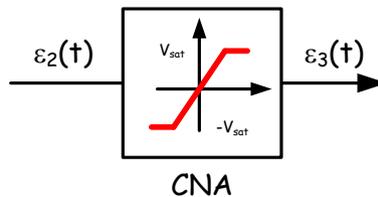


Essai de réponse indicielle avec un échelon de consigne de 300 mm,  $G = 1$ . Le système sature pendant 276 ms. Peut-on encore modéliser avec un modèle de boucle fermée ?

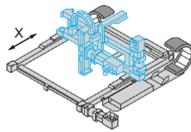


**Écarts modèle-réel : du côté de la carte de commande**  
Non continuité : la quantification liée au convertisseur numérique analogique

**Ctrl + clic pour revenir au sommaire**



La conversion numérique analogique sur 16 bits engendre des écarts de tension de 0.3 mV maximum par rapport au cas continu : c'est tout à fait négligeable.  
Le bruit de quantification que cela induit sera très faible. S'il n'est pas filtré par le variateur de vitesse, il le sera par la mécanique de l'axe.

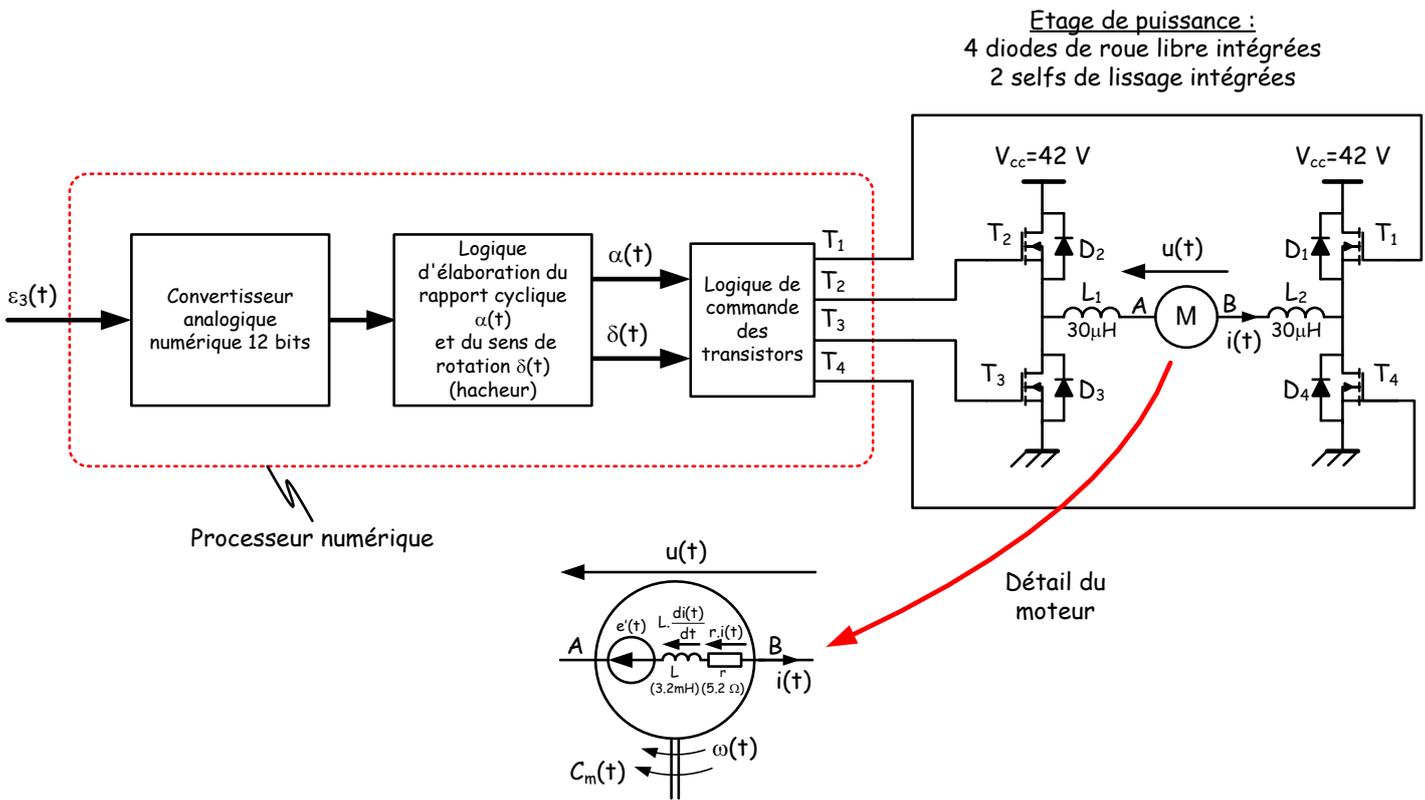
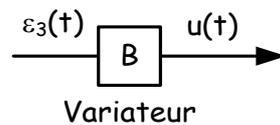


**Écarts modèle-réel : du côté de la carte de puissance**

Non continuité : le PWM

**Ctrl + clic pour revenir au sommaire**

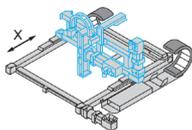
L'interface de puissance est composée principalement d'un convertisseur analogique numérique, d'une logique d'élaboration du rapport cyclique et du sens de rotation et d'une logique de commande des transistors de puissance du pont. Le pont utilisé est un pont en H à 4 quadrants. La fréquence du PWM est de 53.6 kHz.



Organisation interne du variateur de vitesse, aucune des sécurités n'est représentée

Plusieurs hypothèses doivent être formulées pour pouvoir considérer que la carte de puissance se comporte en gain pur ( $B = 4$ ) :

- Quantification liée au convertisseur analogique numérique négligée
- Dynamique négligée (celle liée au processeur numérique et celle liée au temps de commutation des transistors et des diodes de roue libre du pont en H)



- Fréquence du PWM suffisamment élevée pour négliger les ondulations de courant et de vitesse du moteur.
- Pas de saturation de l'étage de sortie

**Nota :** Les selfs de lissage intégrées au variateur (30µH) sont de valeur négligeable par rapport à l'inductance de l'induit du moteur (3.2 mH)

En notant :

$\varepsilon_3(t)$  : la tension d'entrée du variateur :  $\varepsilon_3(t) \in [-10V ; 10V]$

$\alpha(t)$  : le rapport cyclique

$\delta(t)$  : le signe de  $\varepsilon_3(t)$

$V_{cc}$  : la tension d'alimentation de l'étage de puissance du pont en H :  $V_{cc} = 42 V$

$U_c$  : la chute de tension aux bornes des transistors  $\approx 2\%$  max de  $V_{cc}$ .

$B$  : le gain en tension du variateur :  $B = 4$

$u(t)$  et  $u_{moyenne}(t)$  : la tension et la tension moyenne au bornes du moteur

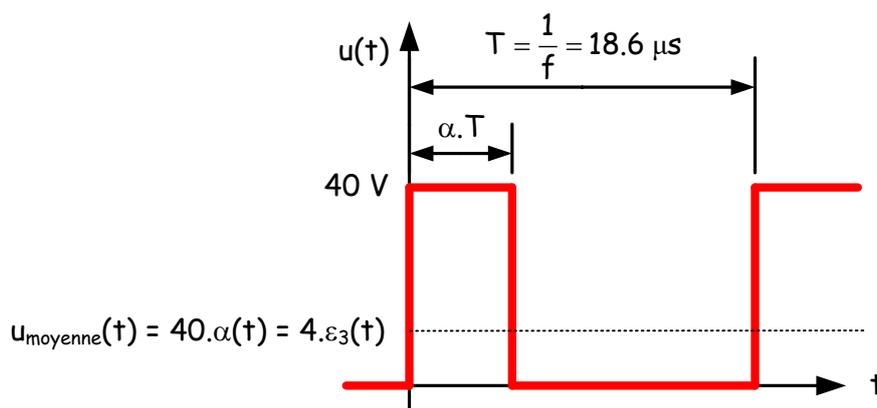
Le processeur de la carte calcule les paramètres  $\alpha(t)$  et  $\delta(t)$  :

$$\alpha(t) = \frac{B \cdot |\varepsilon_3(t)|}{V_{cc} - U_c} \approx \frac{B \cdot |\varepsilon_3(t)|}{0.98 \cdot V_{cc}} \approx \frac{4 \cdot |\varepsilon_3(t)|}{40} \approx 0.1 |\varepsilon_3(t)|$$

$$\delta(t) = \text{signe} [\varepsilon_3(t)] = \frac{\varepsilon_3(t)}{|\varepsilon_3(t)|}$$

La tension moyenne aux bornes du moteur vaut alors :

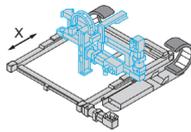
$$u_{moyenne}(t) = \alpha(t) \cdot (V_{cc} - U_c) \cdot \delta(t) \approx 40 \cdot \alpha(t) \cdot \delta(t) \approx 4 \cdot \varepsilon_3(t)$$



Par exemple si  $\varepsilon_3(t) = 0 V$ ,  $\alpha(t) = 0$ ,  $\delta(t) = 0$  ou  $1$  (peu importe),  $u_{moyenne}(t) = 0 V$

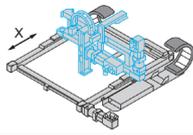
$\varepsilon_3(t) = 10 V$ ,  $\alpha(t) = 1$ ,  $\delta(t) = 1$ ,  $u_{moyenne}(t) = 40 V$

$\varepsilon_3(t) = -5 V$ ,  $\alpha(t) = 0.5$ ,  $\delta(t) = -1$ ,  $u_{moyenne}(t) = -20 V$



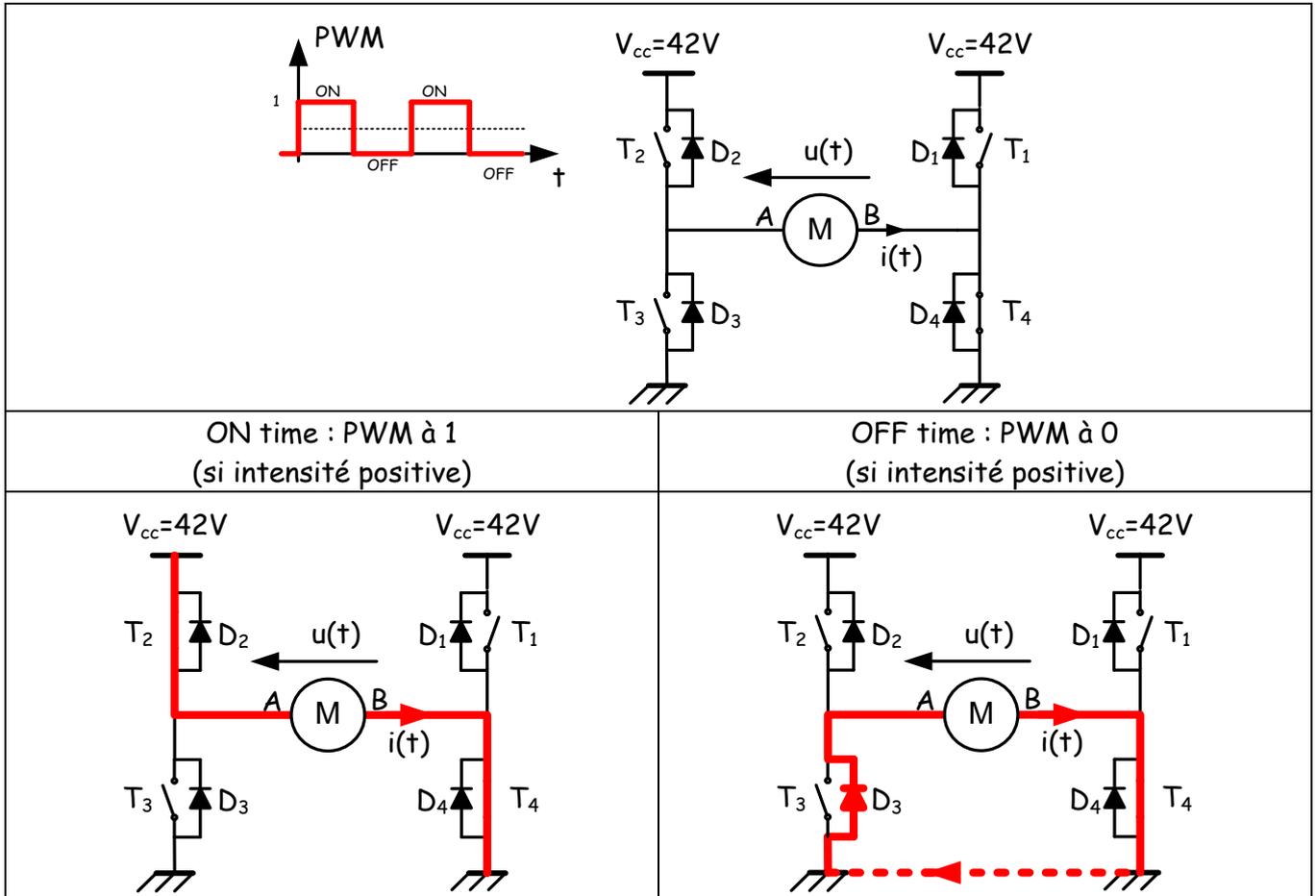
Le tableau ci-dessous résume le fonctionnement du variateur : les transistors sont remplacés par leur interrupteur équivalent. Les selfs de lissage intégrées au variateur ne sont pas représentées.

Signe de $\varepsilon_3(t)$	$\delta(t)$	$\alpha(t)$	T <sub>1</sub>	T <sub>2</sub>	T <sub>3</sub>	T <sub>4</sub>
Positif	1	[0-1]	Bloqué (interrupteur ouvert)	Piloté à 53.6 kHz avec le rapport cyclique $\alpha$	Bloqué (interrupteur ouvert)	Saturé (interrupteur fermé)
Négatif	-1	[0-1]	Piloté à 53.6 kHz avec le rapport cyclique $\alpha$	Bloqué (interrupteur ouvert)	Saturé (interrupteur fermé)	Bloqué (interrupteur ouvert)



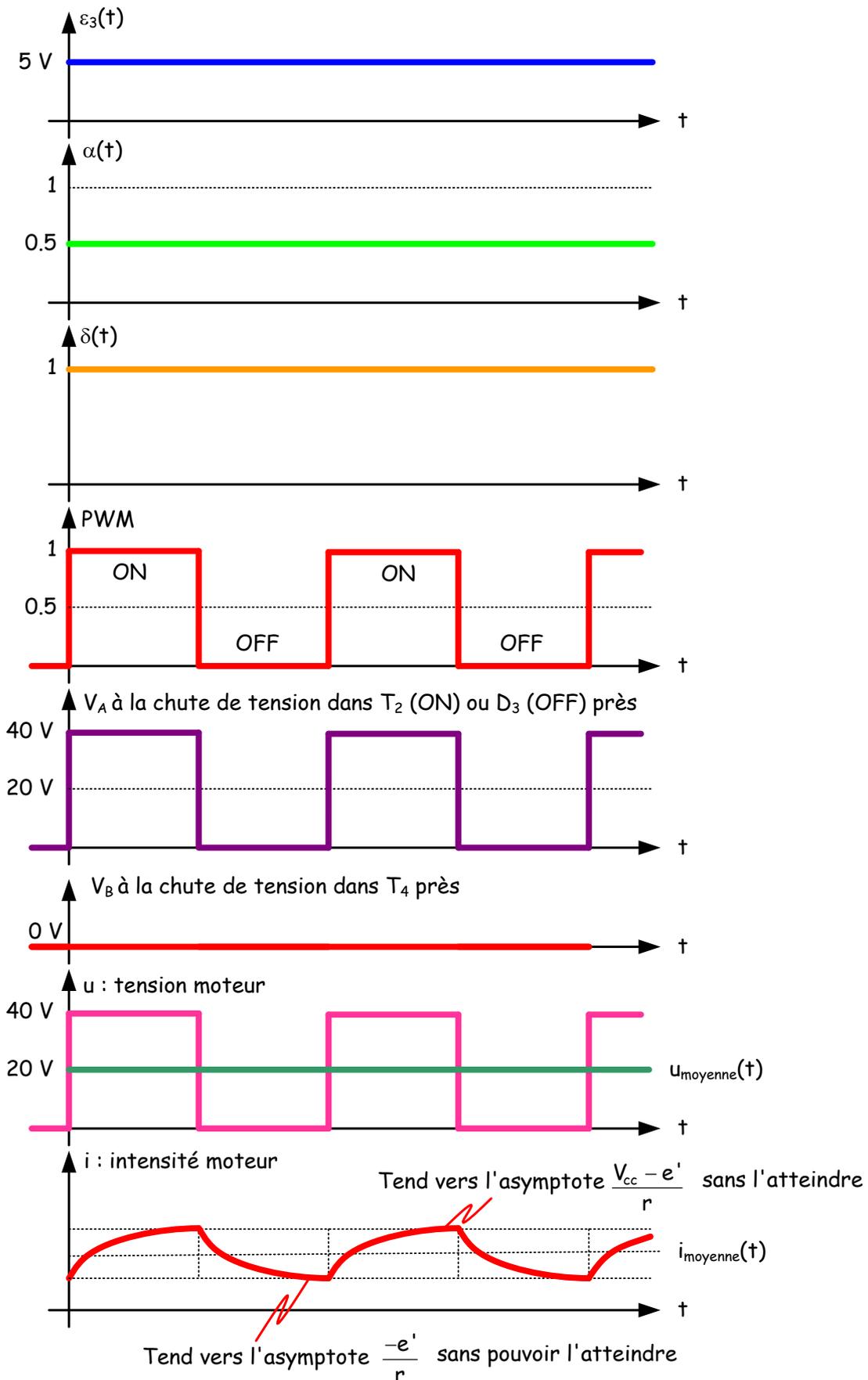
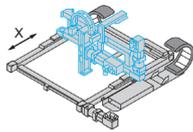
Le tableau ci-dessous indique plus précisément la circulation du courant pendant les différentes phases de fonctionnement du pont.

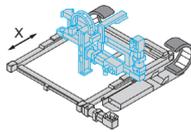
Les tracés sont effectués pour  $\varepsilon_3(t) = 5 \text{ V}$ ,  $\alpha(t) = 0.5$ ,  $\delta(t) = 1$ ,  $u_{\text{moyenne}}(t) = 20 \text{ V}$



**Nota :** La période du PWM étant très faible ( $18.6 \mu\text{s}$ ) par rapport aux constantes de temps mécanique ( $22 \text{ ms}$ ) et électrique ( $0.6 \text{ ms}$ ), les tracés suivants sont effectués sous les hypothèses suivantes :

- La vitesse moteur est quasi constante sur une période du PWM, la force contre électromotrice  $e'(t)$  l'est donc aussi.
- Le courant décroît mais n'a pas le temps de s'annuler lorsque le PWM est à 0 (OFF time).

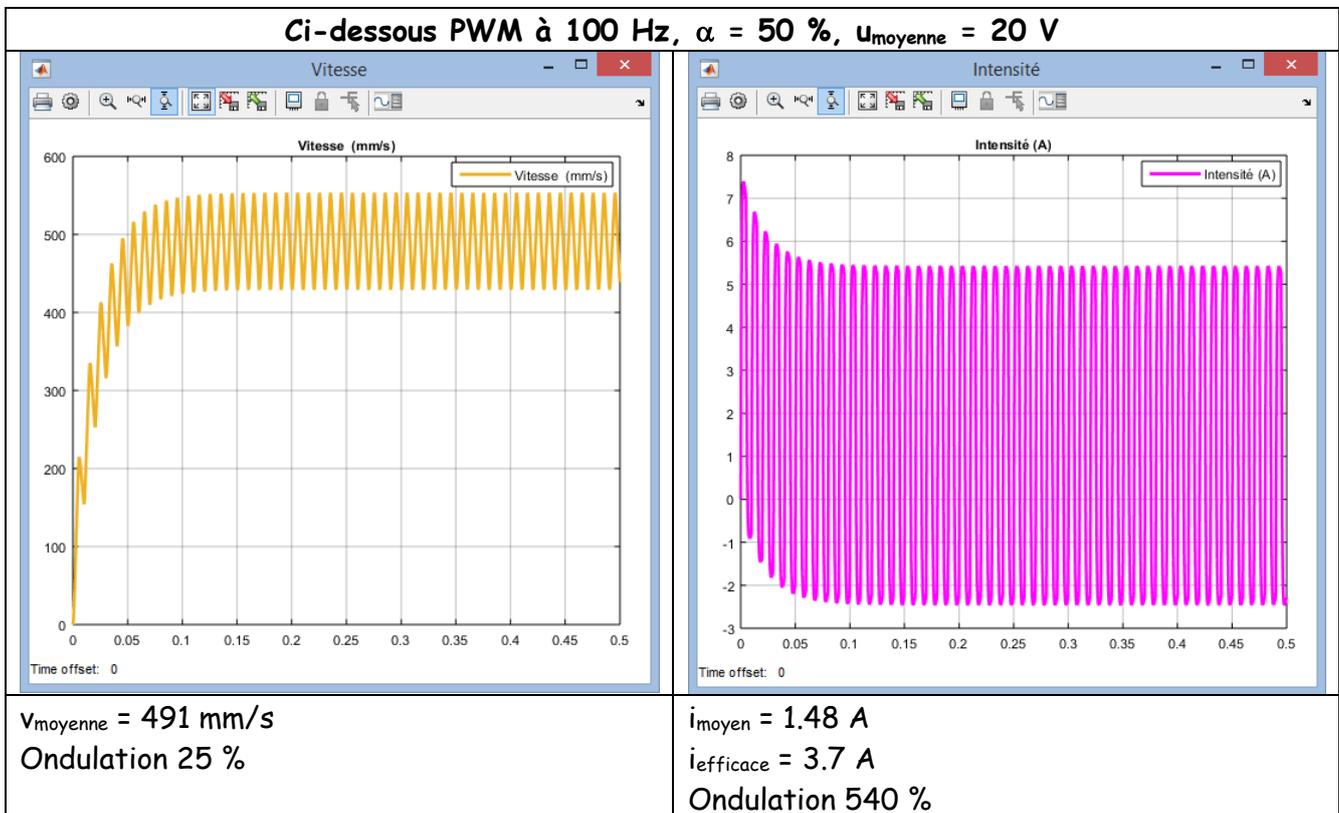


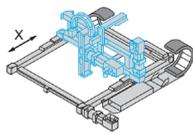


La question à se poser pour pouvoir modéliser le variateur de vitesse par un gain pur est de savoir si la fréquence du PWM est suffisante pour pouvoir considérer que tout se passe comme si l'amplification était analogique (continue). Il faut en particulier analyser l'évolution de deux signaux :

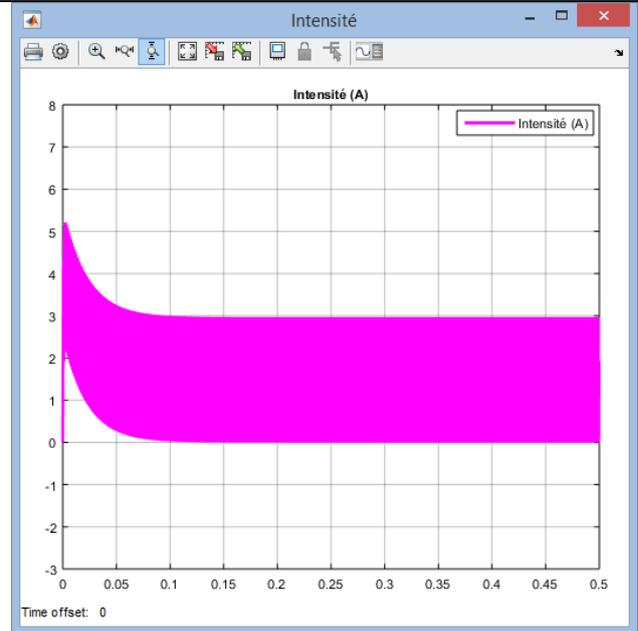
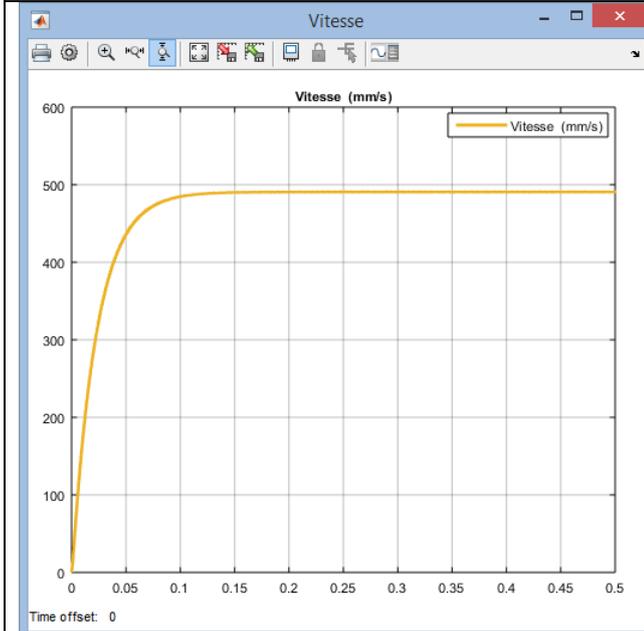
- La vitesse moteur : plutôt liée à la constante de temps mécanique  $\approx 22$  ms
- L'intensité moteur : plutôt liée à la constante de temps électrique  $\approx 0.6$  ms

Les signaux ci-dessous sont tracés pour une tension d'alimentation de moteur en échelon de tension de 20 V (rapport cyclique du PWM  $\approx 50\%$ ) : simulation sur la base d'un modèle avec prise en compte de l'inductance L du moteur (c'est indispensable pour analyser l'ondulation de courant) et d'un couple résistant constant de 30 N (frottements secs).





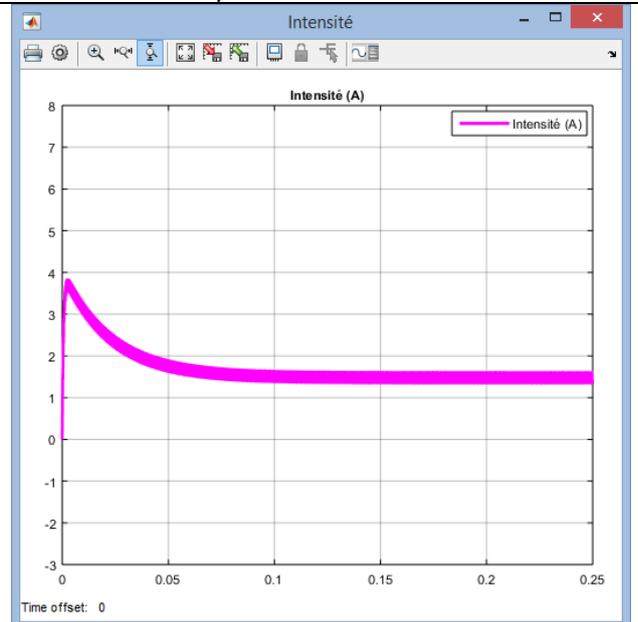
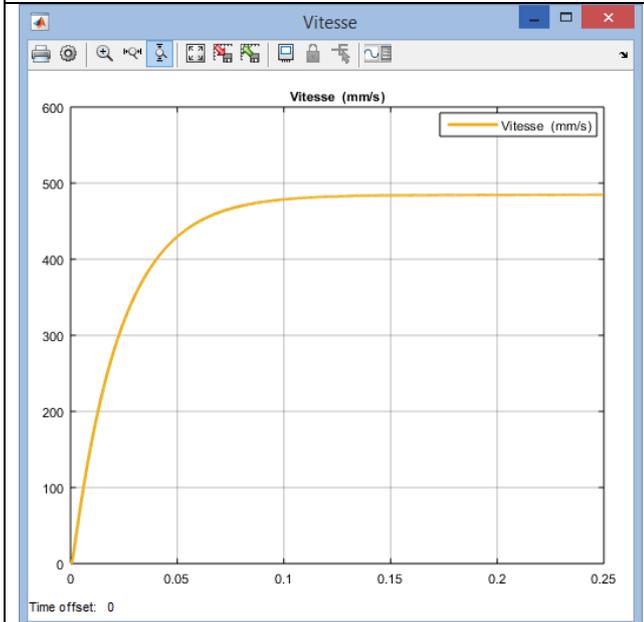
**Ci-dessous PWM à 1 kHz,  $\alpha = 50\%$ ,  $u_{moyenne} = 20\text{ V}$**



$v_{moyenne} = 491\text{ mm/s}$   
Ondulation 0.6 %

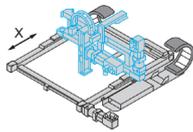
$i_{moyen} = 1.48\text{ A}$   
 $i_{efficace} = 1.72\text{ A}$   
Ondulation 201 %

**Ci-dessous PWM à 10 kHz,  $\alpha = 50\%$ ,  $u_{moyenne} = 20\text{ V}$**

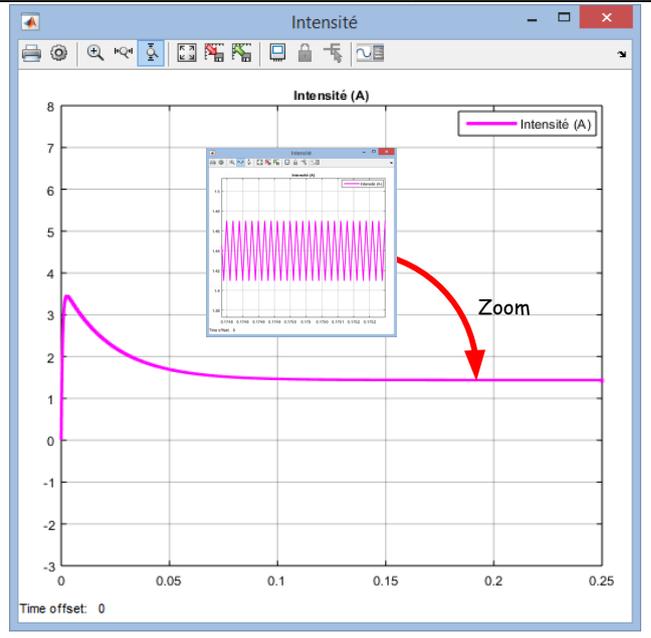
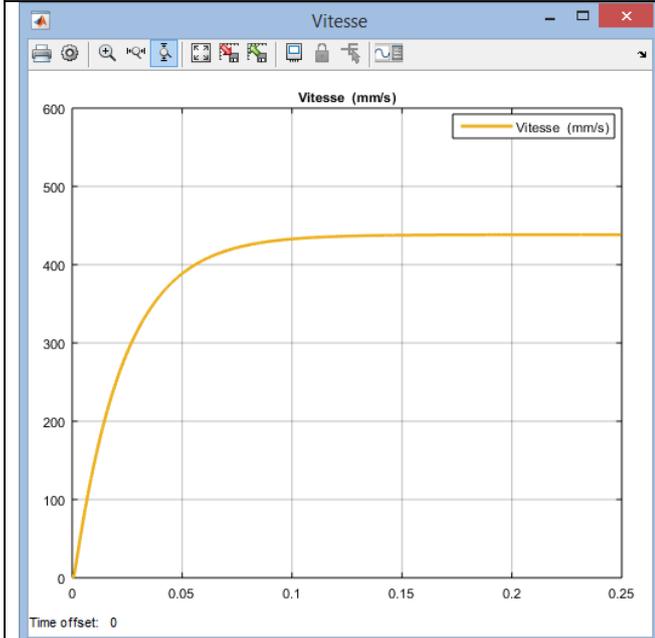


$v_{moyenne} = 491\text{ mm/s}$   
Ondulation  $\approx 0\%$

$i_{moyen} = 1.48\text{ A}$   
 $i_{efficace} = 1.48\text{ A}$   
Ondulation 21 %



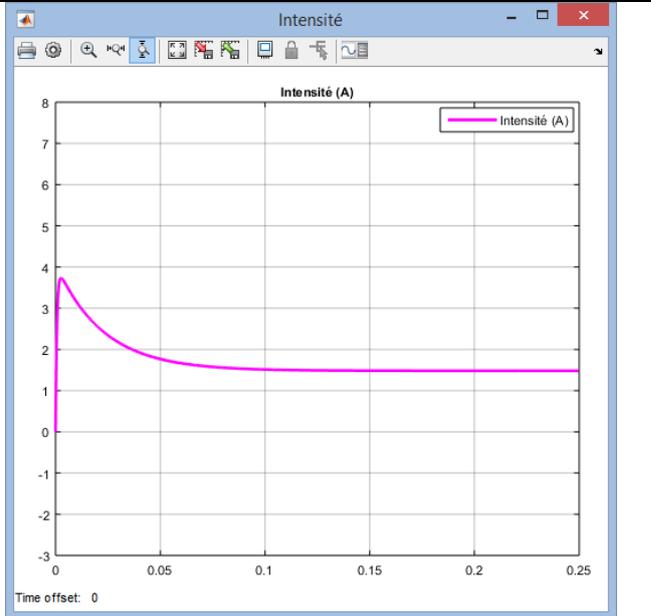
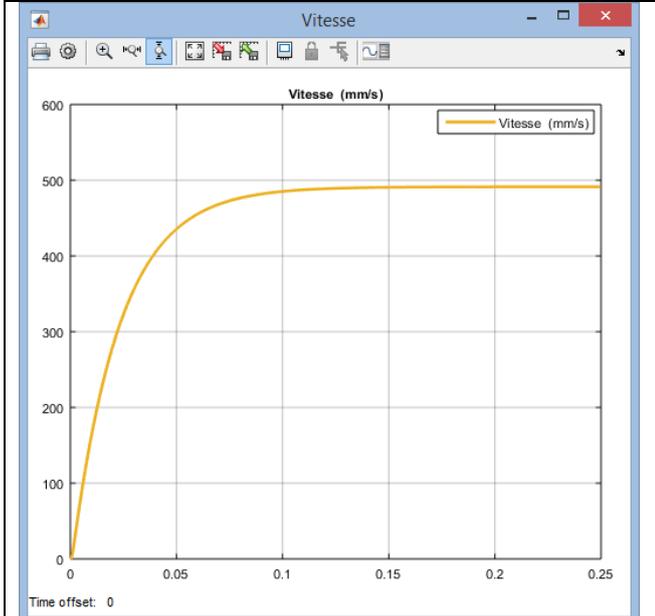
**Ci-dessous PWM à 53.6 kHz (fréquence du variateur),  $\alpha = 50\%$ ,  $u_{moyenne} = 20\text{ V}$**



$v_{moyenne} = 491\text{ mm/s}$   
Ondulation  $\approx 0\%$

$i_{moyen} = 1.48\text{ A}$   
 $i_{efficace} = 1.48\text{ A}$   
Ondulation 4%

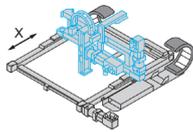
**Ci-dessous tension continue  $u = 20\text{ V}$**



$v_{moyenne} = 491\text{ mm/s}$   
Ondulation 0%

$i_{moyen} = 1.48\text{ A}$   
 $i_{efficace} = 1.48\text{ A}$   
Ondulation 0%

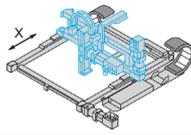
Lorsque les ondulations de courant sont importantes, les ondulations de couple moteur le sont aussi. Des vibrations (parfois audibles) peuvent être générées et exciter la structure de Control'X.



Des ondulations de courant importantes impliquent aussi une valeur efficace du courant qui peut être bien différente du courant moyen. L'échauffement du moteur voire même son rendement peut en pâtir.

**Conclusion** : A la fréquence du PWM de 53.6 kHz du variateur de puissance, les ondulations de vitesse et de courant sont tout à fait négligeables : tout se passe comme si l'alimentation du moteur se faisait de façon continue.

Voir sous Control'Drive dans le menu "Bonus", "Validation PWM" pour traiter ce point de façon exhaustive.



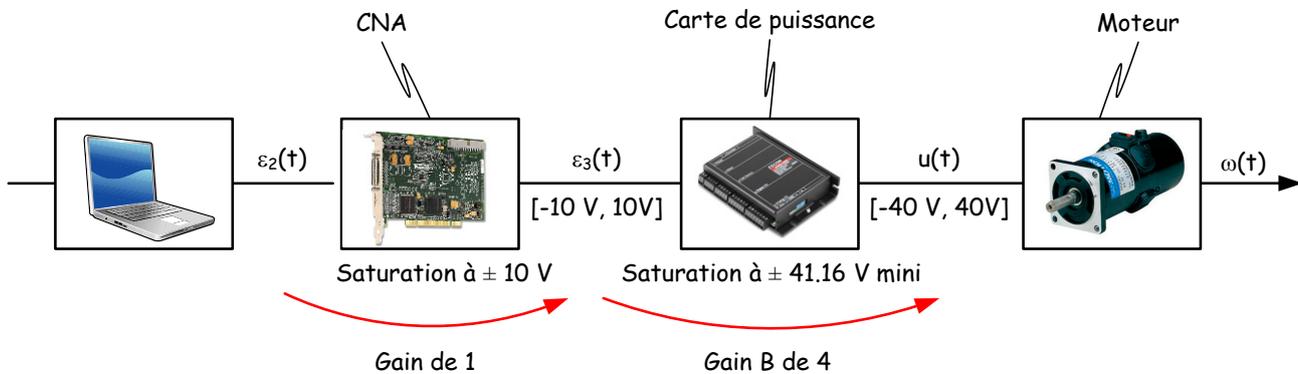
**Ecart modèle-réel : du côté de la carte de puissance**

Non linéarité : Saturation de la tension de sortie

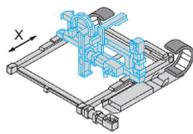
**Ctrl + clic pour revenir au sommaire**

La carte de puissance est réglée de façon à se comporter en amplificateur de tension de gain  $B = 4$ .

Cette carte est alimentée sous une tension  $V_{cc} \approx 42 \text{ V}$ . La chute de tension dans les transistors de puissance du pont en H est telle que la tension maxi aux bornes du moteur peut atteindre  $0.98.V_{cc}$  ce qui est légèrement supérieur à  $40 \text{ V}$ .



La carte de commande saturant à  $\pm 10 \text{ V}$ , compte tenu du gain  $B = 4$ , l'interface de puissance ne saturera donc jamais en tension.



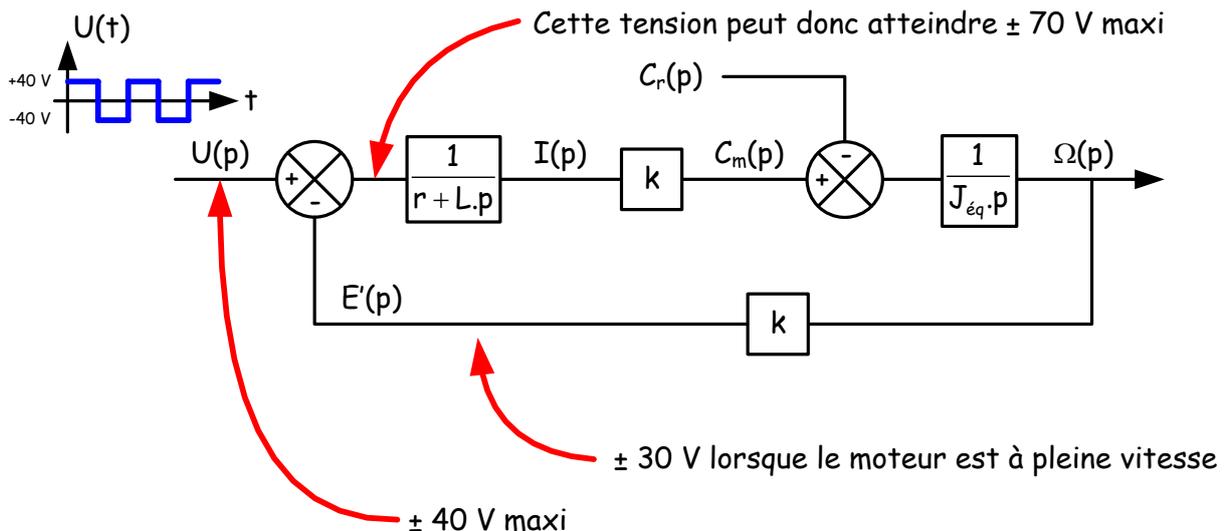
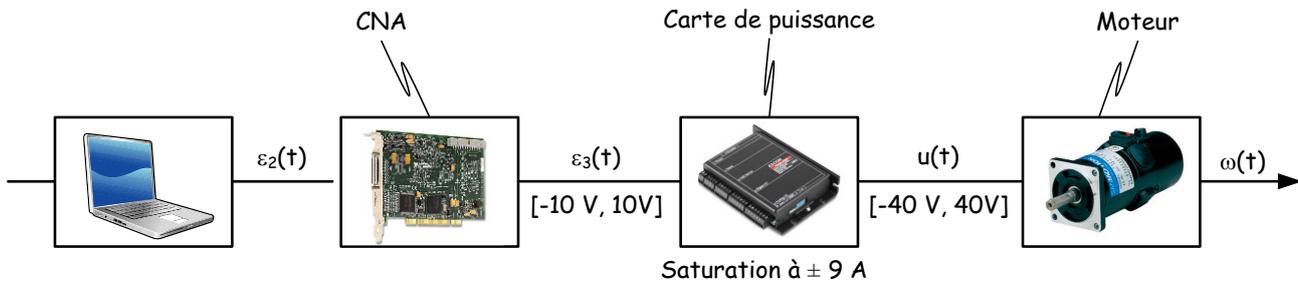
**Ecart modèle-réel : du côté de la carte de puissance**

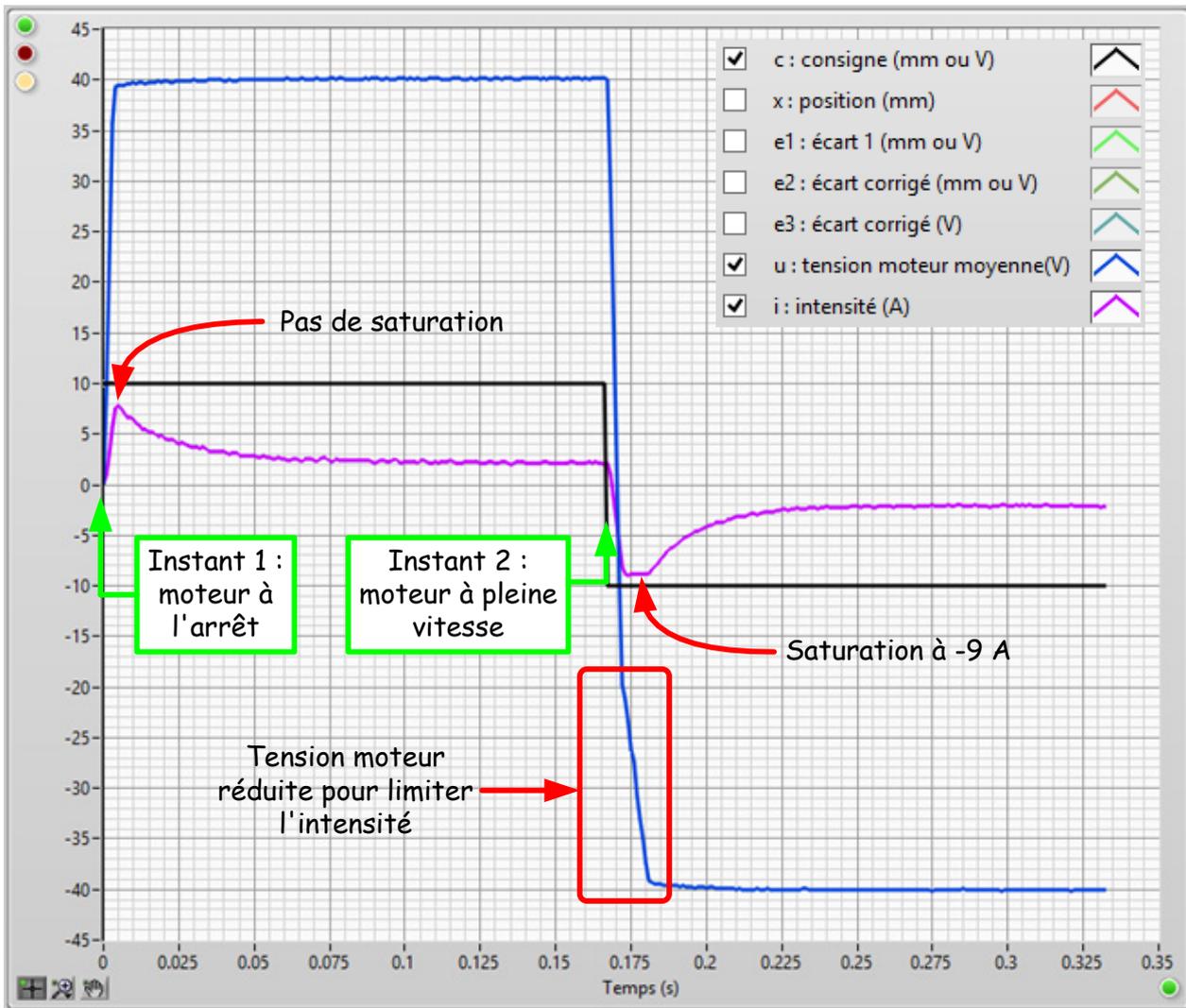
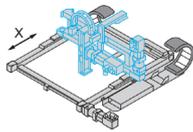
Non linéarité : Saturation de l'intensité de sortie

La saturation en intensité de la carte de puissance est réglée sur  $i_{max} = 9 \text{ A}$ . Dans les fait, lorsque cette intensité est atteinte, c'est la tension d'alimentation du moteur qui chute (en valeur absolue) de façon à ne pas dépasser les 9 A.

L'essai le plus violent qui soit est un essai en boucle ouverte sous une tension rectangulaire  $\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) = \pm 10 \text{ V}$ . Cela tend à générer une tension d'alimentation du moteur de  $\pm 40 \text{ V}$ . Lorsque le régime permanent est atteint (moteur à pleine vitesse), la force contre électromotrice

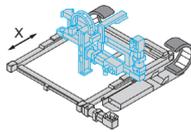
$e'(t) = k \cdot \omega(t)$  vaut environ 30 V (et non 40 V compte tenu des efforts résistants).



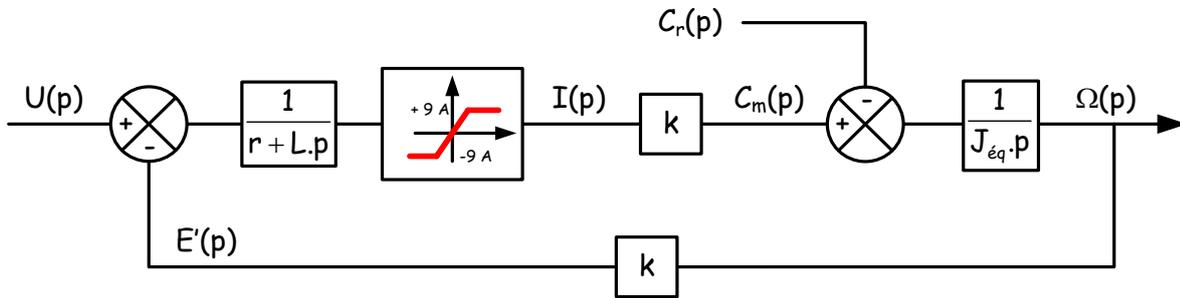


Essai en boucle ouverte sous une tension rectangulaire  $\varepsilon_2(t) = \pm 10 \text{ V}$  (en noir)

Instant 1	Instant 2
Echelon de tension de + 40 V avec moteur initialement à l'arrêt	Echelon de tension de - 40 V avec moteur initialement à pleine vitesse
L'intensité tend alors vers la valeur $i(t) = \frac{40}{r} = \frac{40}{5.1} \approx 7.8 \text{ A}$ Cette valeur asymptotique ne sera pas atteinte compte tenu de la dynamique électrique en $\frac{L}{r}$ .  <b>La carte de puissance ne sature pas.</b>	L'intensité tend alors vers la valeur $i(t) = \frac{70}{r} = \frac{70}{5.1} \approx 13.7 \text{ A}$ Cette valeur asymptotique ne sera pas atteinte compte tenu de : <ul style="list-style-type: none"> <li>• La dynamique électrique en <math>\frac{L}{r}</math></li> <li>• La saturation à 9 A</li> </ul>

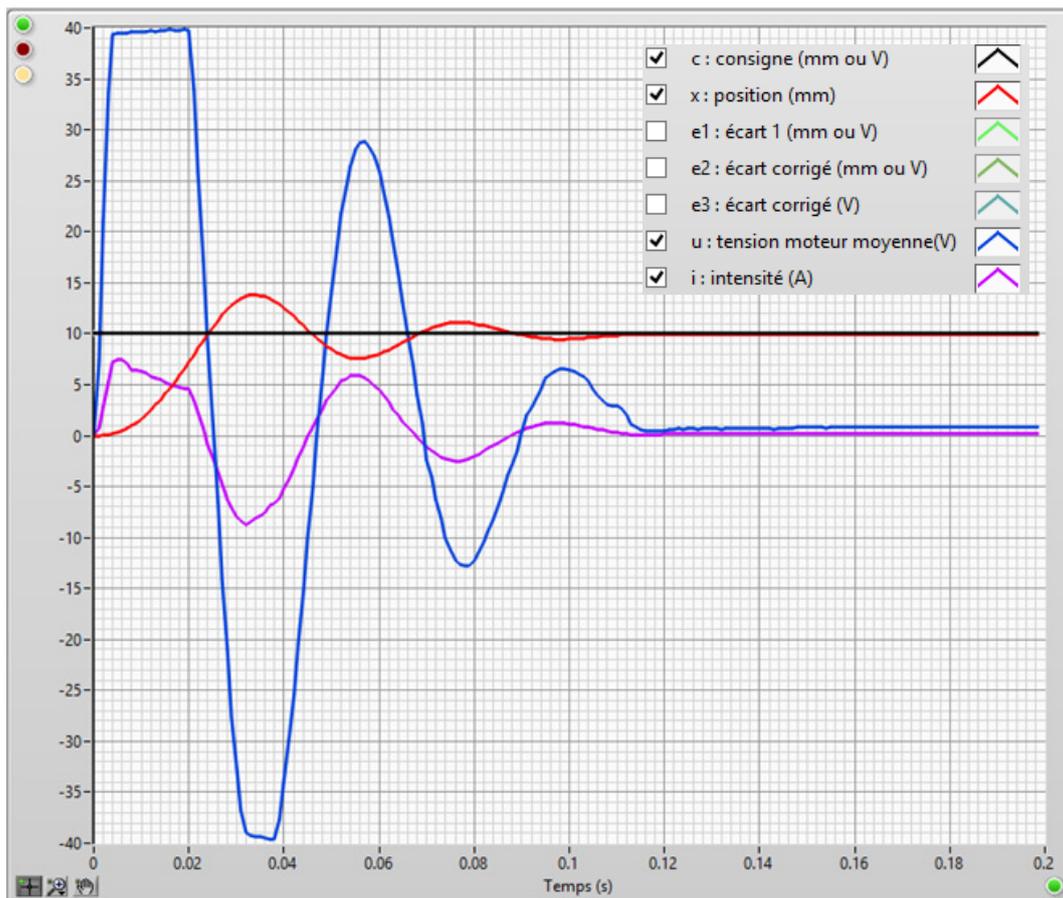


Un modèle prenant en compte la saturation en intensité serait alors celui-ci :



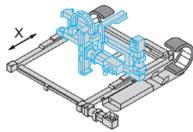
La saturation apparaît dans le schéma bloc du moteur mais physiquement, elle prend son origine dans le variateur de vitesse.

Lors d'un essai un peu plus standard (boucle fermée même avec un correcteur de valeur relativement élevée) la carte de puissance ne sature pas en intensité.



Essai en boucle fermée avec échelon de 10 mm et un correcteur de gain 3 : l'intensité ne sature pas

**Conclusion** : la saturation en intensité n'est généralement pas à prendre en compte dans les modèles.

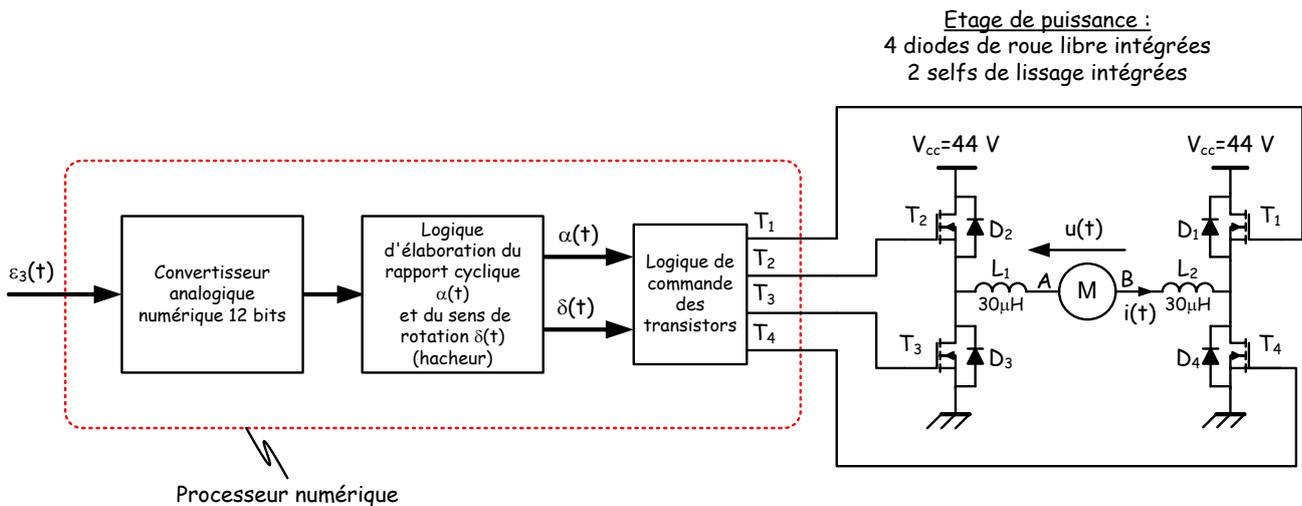


**Écarts modèle-réel : du côté de la carte de puissance**

Dynamique négligée

**Ctrl + clic pour revenir au sommaire**

Le variateur de vitesse est architecturé autour d'un contrôleur numérique (DSP, MCU ou FPGA, cela n'est pas précisé par le constructeur). Il n'a pas un comportement continu mais échantillonné.

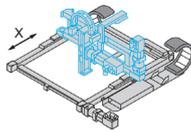


La fréquence d'échantillonnage n'est pas non plus précisée par le constructeur Maxon. A priori elle doit être au moins supérieure à 53.6 kHz, la fréquence du PWM.

L'étage de sortie est basé sur un pont en H composé de quatre transistors et 4 diodes de roue libre. La dynamique liée à la saturation / désaturation des transistors ainsi que celle liée au temps de réaction des diodes est ici négligée.

**En conclusion de tout ce qui concerne la carte de puissance :**

Compte tenu de la fréquence du PWM, de la non saturation de la tension de sortie et de la dynamique de commutation de l'étage de sortie négligée, un modèle de gain pur semble être assez approprié ( $B = 4$ ).

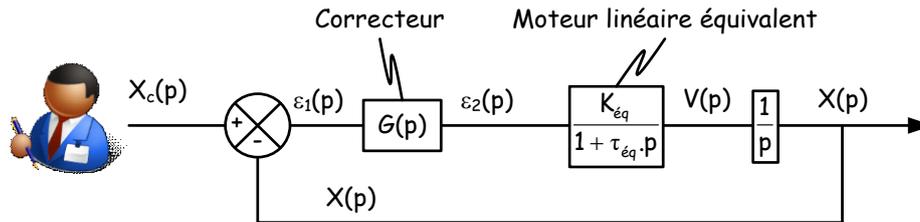


**Ecart model-réel : du côté du moteur**

Dynamique négligée : Constante de temps électrique non prise en compte

**Ctrl + clic pour revenir au sommaire**

Rappelons le modèle de base utilisé :



Avec un correcteur proportionnel  $G(p) = G$ , on a :

$$H_{bo}(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon_1(t)} = \frac{G \cdot K_{\text{éq}}}{p \cdot (1 + \tau_{\text{éq}} \cdot p)} \quad \text{où } K_{\text{éq}} = \frac{B \cdot K_{\text{mot}} \cdot R}{i} \quad \text{et } \tau_{\text{éq}} = \tau_{\text{mot}}$$

Lorsque l'inertie de tout l'équipage mobile est prise en compte, la constante de temps mécanique du moteur vaut  $\tau_{\text{mot}} \approx 22 \text{ ms}$ .

La constante de temps électrique que l'on obtiendrait en considérant l'inductance du bobinage du moteur vaudrait  $\tau_{\text{élec}} \approx 0.6 \text{ ms}$ .

Le rapport de ces deux constantes de temps vaut donc 36.

**Nota :** En ne prenant en compte que l'inertie du rotor moteur, on aurait  $\tau_{\text{mot}} \approx 4.3 \text{ ms}$ .

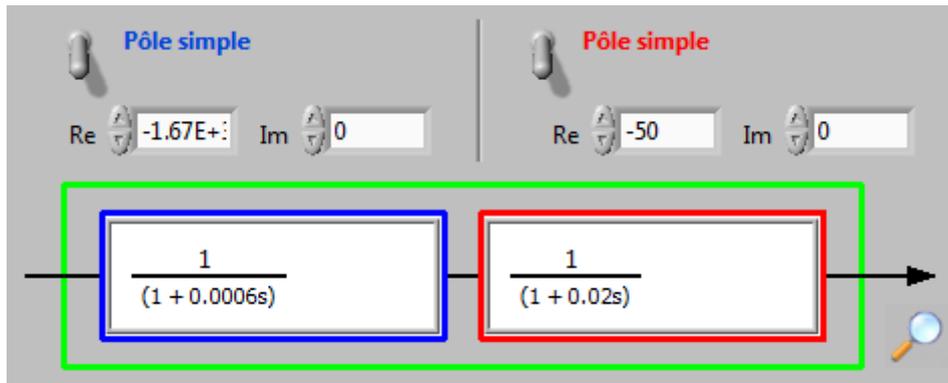
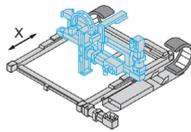
Ci-dessous, les considérations faites sur la boucle ouverte non corrigée seule en observant non pas la position  $x(t)$  mais la vitesse du chariot  $V(t)$ .

Modèle de moteur en négligeant la constante de temps électrique :

$$\frac{V(p)}{\varepsilon_2(t)} = \frac{K_{\text{éq}}}{(1 + \tau_{\text{méca}} \cdot p)} = \frac{132}{(1 + 0.022 \cdot p)}$$

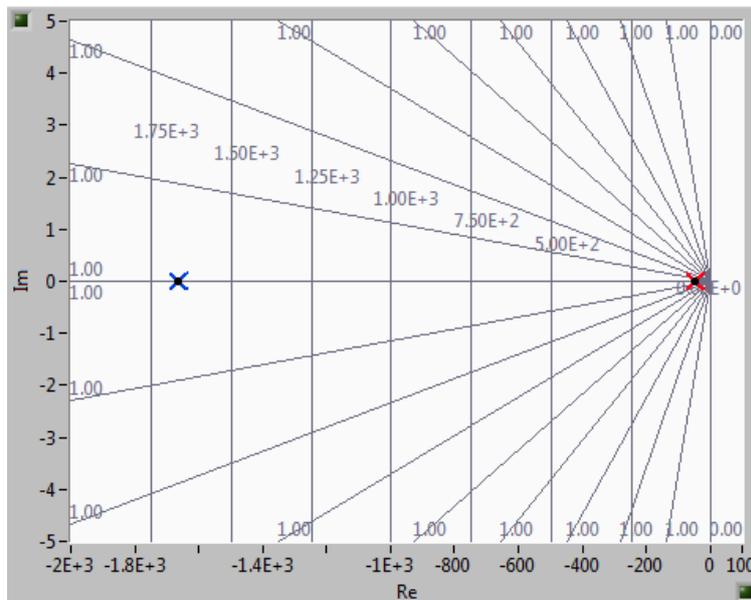
Modèle de moteur tenant compte de la constante de temps électrique :

$$\frac{V(p)}{\varepsilon_2(t)} = \frac{K_{\text{éq}}}{(1 + \tau_{\text{élec}} \cdot p) \cdot (1 + \tau_{\text{méca}} \cdot p)} = \frac{132}{(1 + 0.0006 \cdot p) \cdot (1 + 0.022 \cdot p)}$$

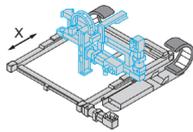


Décomposition de la fonction de transfert du moteur seul en un produit de deux premiers ordres

En **bleu** le premier ordre le plus rapide (constante de temps électrique), en **rouge** le premier ordre le plus lent (mode dominant) et en **vert** la fonction de transfert du moteur complet (2° ordre)

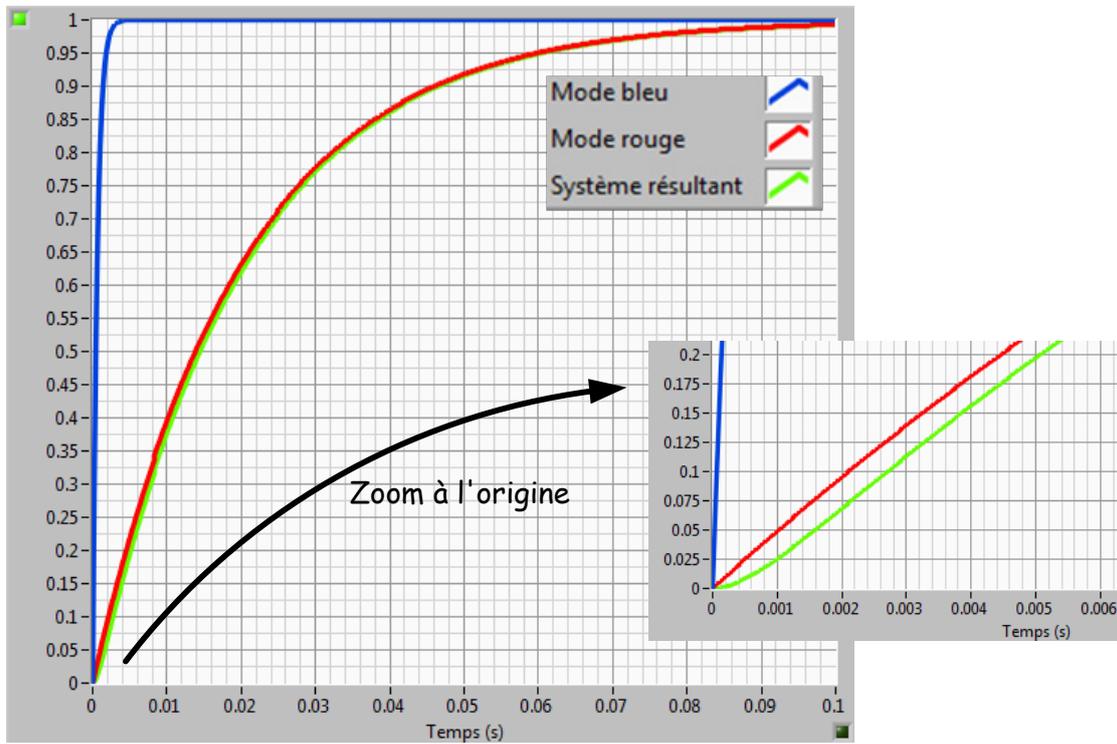


Pôles de la fonction de transfert du moteur

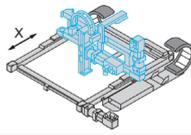


**Aspect temporel :**

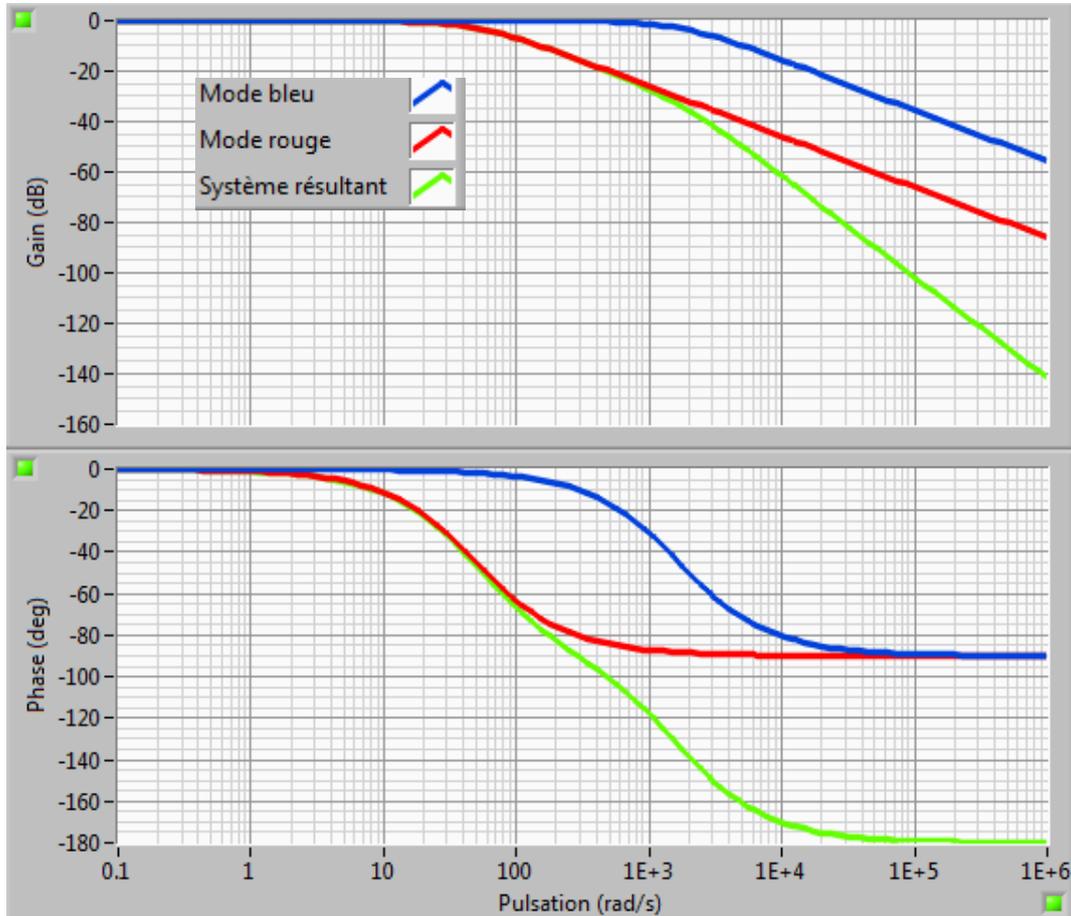
On présente ci-dessous les réponses indicielles unitaires du **mode rapide** (1° ordre électrique), du **mode lent** (1° ordre mécanique) et du **modèle de moteur** du 2° ordre



Réponses indicielles unitaires des deux modes du premier ordre et du moteur (2°ordre)

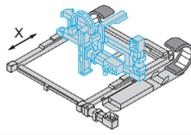


**Aspect fréquentiel :**



Réponses harmoniques des deux modes du premier ordre et du moteur (2<sup>o</sup>ordre)

La divergence des deux modèles apparaît significativement à partir de 200 rad/s : c'est bien au-dessus des pulsations dictées par le choix d'un amortissement "convenable" (autour de 50 rad/s de pulsation de coupure à 0 dB).

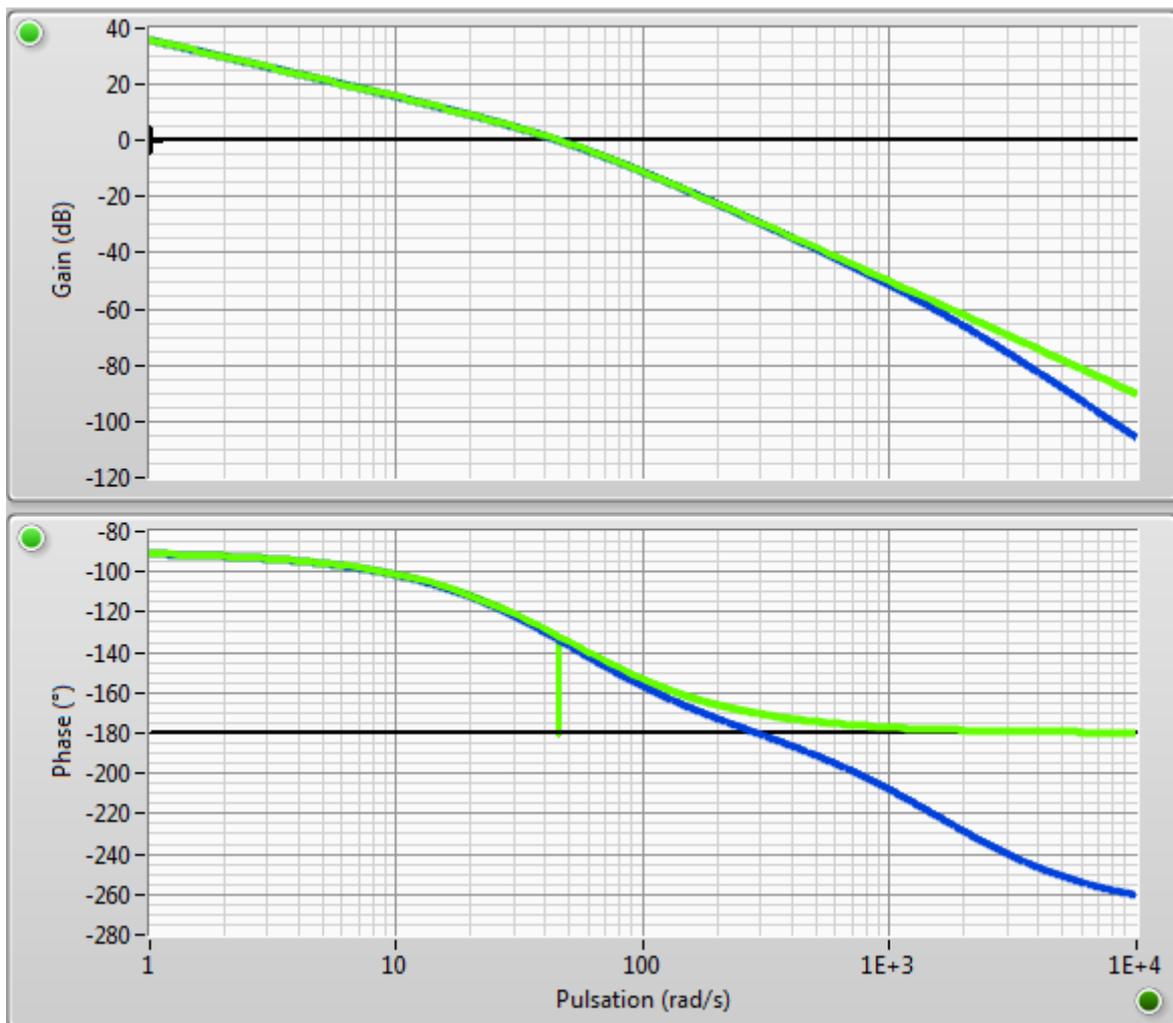


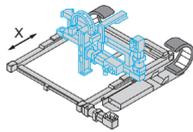
En négligeant la constante de temps électrique devant la constante de temps mécanique, le moteur est modélisé par un 1<sup>o</sup> ordre. Le comportement haute fréquence du modèle de boucle fermée reflètera alors moins bien celui du système réel. En particulier, l'instabilité produite, sur le système réel, par une trop forte augmentation du gain  $G$ , ne pourra pas être mise en évidence avec le modèle de moteur du 1<sup>o</sup> ordre (marges de gain et de phase toujours strictement positives).

Ci-dessous : boucle ouverte corrigée par le correcteur proportionnel qui permet de viser 45° de marge de phase

En **vert** modèle de boucle ouverte corrigée ( $G = 0.5$ ) en négligeant la constante de temps électrique :  $\omega_{co\ 0dB} = 46\ \text{rad/s}$ ,  $M_\varphi = 45^\circ$ ,  $M_G = \infty$

En **bleu** modèle de boucle ouverte corrigée ( $G = 0.5$ ) prenant en compte la constante de temps électrique :  $\omega_{co\ 0dB} = 46\ \text{rad/s}$ ,  $M_\varphi = 45^\circ$ ,  $M_G = 29\ \text{dB}$





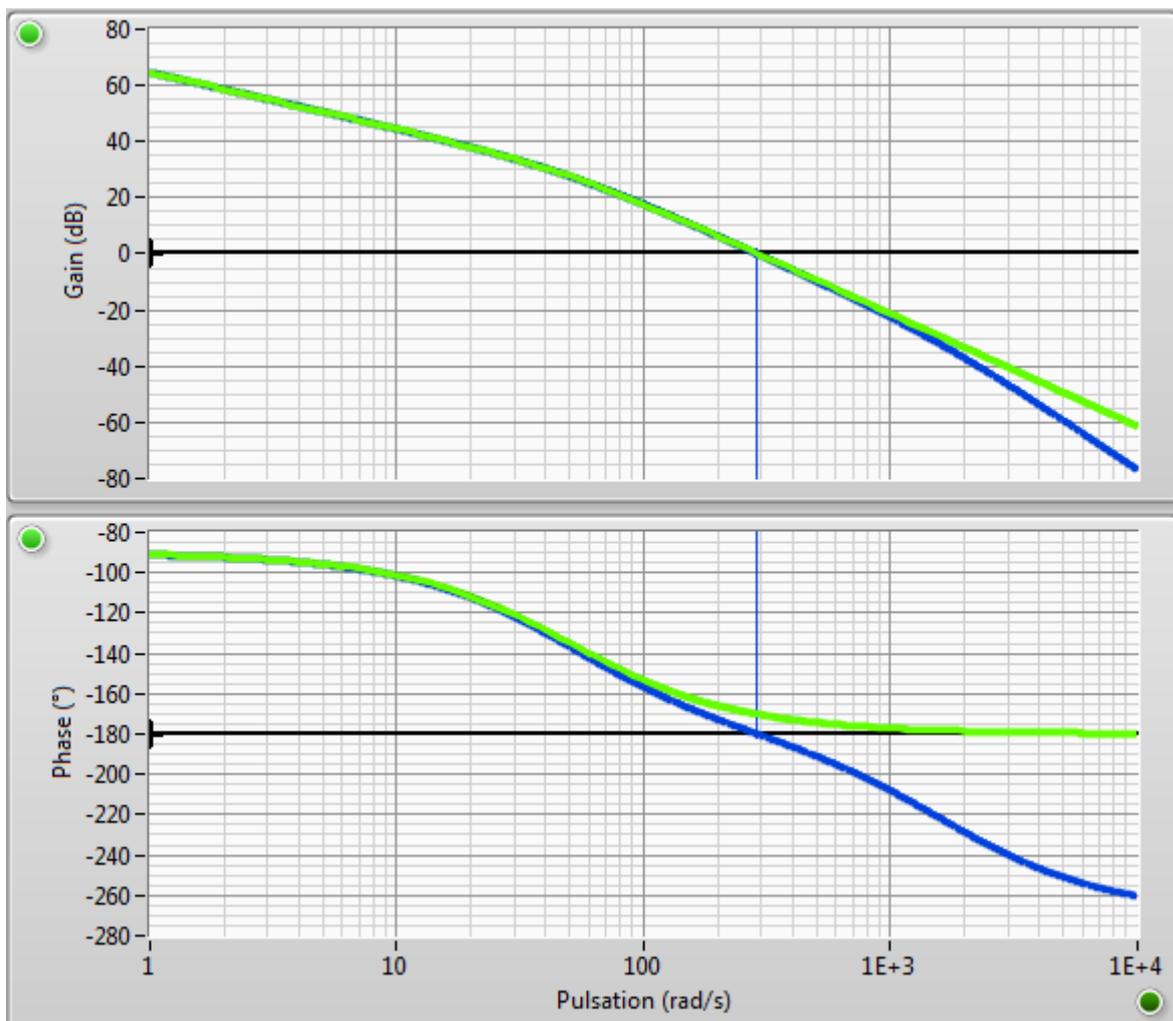
Dans les deux cas, le correcteur proportionnel qui permet de viser une marge de phase de  $45^\circ$  vaut 0.5 et la pulsation de coupure à 0 dB de ces boucles ouvertes ainsi corrigées vaut 46 rad/s.

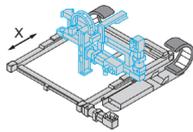
Les pulsations de coupure à 0 dB concernées par des marges de phases de la boucle ouverte corrigée de l'ordre de  $45^\circ$  se situent autour de  $\omega_{co-0dB} \approx 50$  rad/s. A ces pulsations là, le déphasage supplémentaire induit par la constante de temps électrique du moteur ( $\frac{L}{r} \approx 0.63$  ms) est inférieur à  $2^\circ$ .

Ci-dessous : boucle ouverte corrigée par le correcteur proportionnel qui permet de rendre instable le système dont le modèle tient compte de la constante de temps électrique.

En **vert** modèle de boucle ouverte corrigée ( $G = 13.8$ ) en négligeant la constante de temps électrique :  $\omega_{co-0dB} = 290$  rad/s,  $M_\phi = 9.7^\circ$ ,  $M_G = \infty$  : **le système en BF est mal amorti mais stable**

En **bleu** modèle de boucle ouverte corrigée ( $G = 13.8$ ) prenant en compte la constante de temps électrique :  $\omega_{co-0dB} = 288$  rad/s,  $M_\phi = 0^\circ$ ,  $M_G = 0$  dB : **le système est instable en BF !**

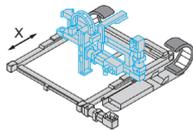




**Conclusion** : pour parler de stabilité la constante de temps électrique doit être introduite alors que pour parler d'amortissement, ce n'est pas nécessaire compte tenu de la gamme de fréquences concernées par les marges de stabilité que l'on vise : Un amortissement "correct" de boucle fermée est un facteur plus contraignant que sa stabilité (c'est évident !).

Toujours à propos de stabilité on liste ci-dessous les phénomènes qui peuvent être modélisés facilement pour approcher le plus possible le comportement réel de Control'X

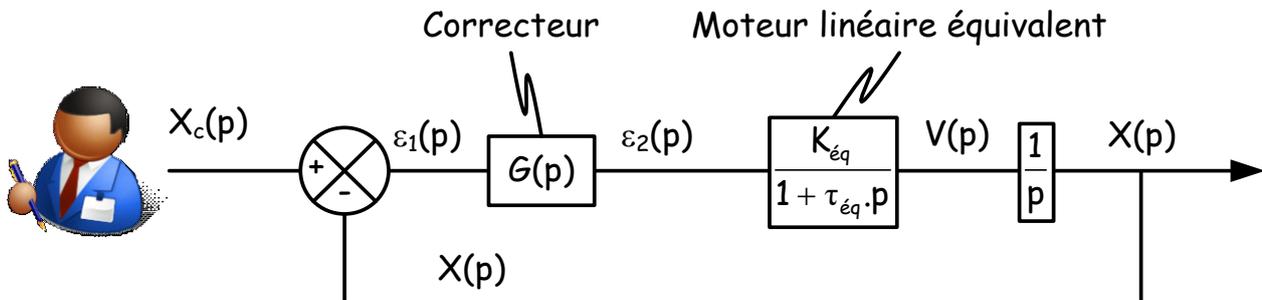
Phénomène physique	Effet pour retarder l'instabilité lorsque le gain $G$ du correcteur proportionnel augmente :
Prise en compte de l'inductance $L$	Défavorable
Prise en compte de l'échantillonnage $f_{\text{éch}}$	Défavorable
Prise en compte des frottements visqueux $f_v$ ou $f_\omega$	Favorable
Prise en compte de la saturation du CNA $V_{\text{sat}}$	Favorable



**Ecart modèle-réel : du côté du moteur**

Perturbations négligées :

**Ctrl + clic pour revenir au sommaire**

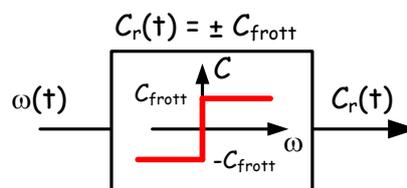


L'écart statique non nul observé sur le système réel ne correspond pas à celui prévu par le modèle : écart annoncé comme étant nul car le modèle de boucle ouverte est de classe 1 et les perturbations ne sont pas prises en compte.

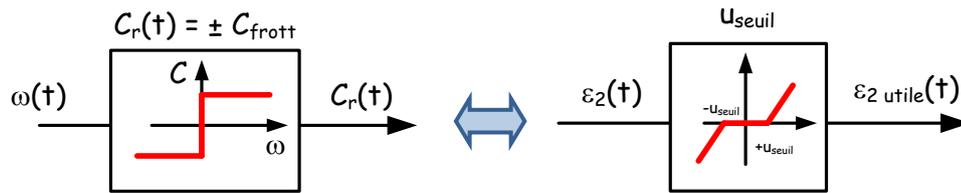
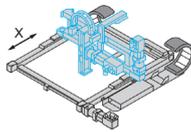
En réalité les résistances passives ne sont pas forcément négligeables. Des perturbations de plusieurs types peuvent être retenues : Résistances de type frottement sec, résistances au roulement et résistances de type frottement visqueux.

- Résistances type frottements secs (contact balais-collecteur par exemple) et résistances au roulement (guidages par éléments roulants).

Ces deux types de résistances passives se modélisent finalement de la même façon : il faut un couple moteur  $C_m(t)$  suffisant pour commencer à vaincre le couple résistant  $C_r(t)$  et à initier le mouvement (Penser au cône d'adhérence). Dans la suite de ce document, ce couple résistant  $C_r(t)$  est désigné comme étant un couple de frottements secs mais c'est bien en réalité la somme d'un couple de résistances au roulement et d'un couple de frottements secs dont il s'agit. On notera  $C_r(t) = \pm C_{frott}$  lorsqu'on fera référence à ce type de résistances. Ce couple  $C_r(t)$  correspond bien-sûr à la somme de toutes les résistances de ce type ramenées sur l'arbre moteur.

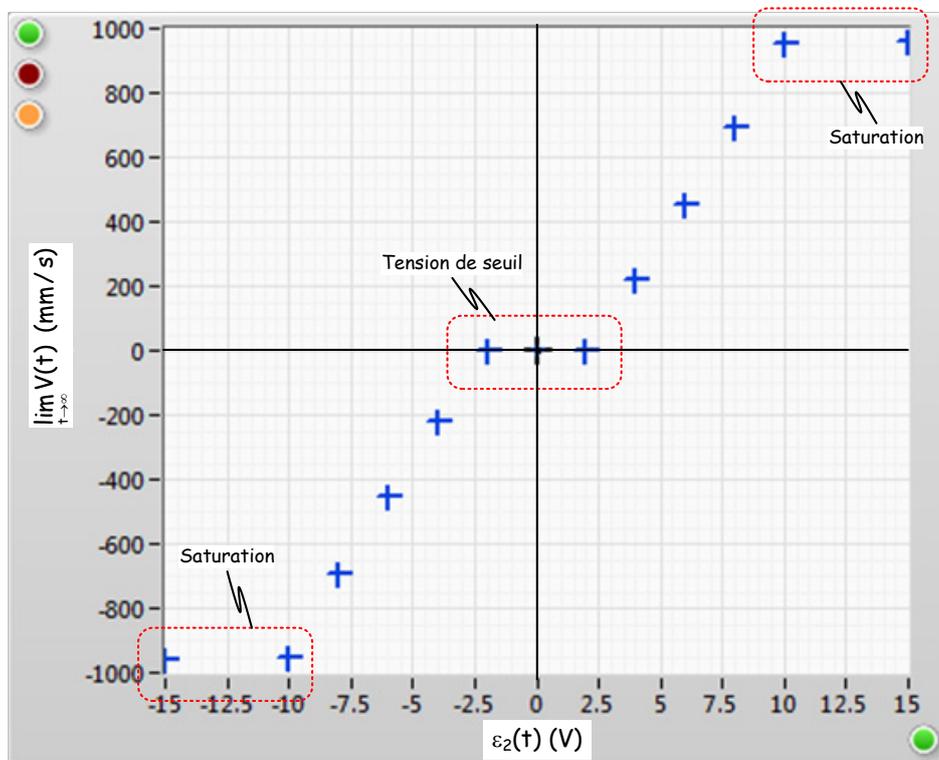


Plus loin dans ce document, on explique la relation entre ce couple de frottements secs  $C_{frott}$  et la tension de seuil de démarrage du moteur  $U_{seuil}$ .



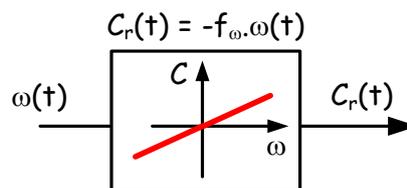
Dans tous les cas de modèles envisagés, ces résistances de type frottements secs  $C_{frott}$ , transformés ou non en tension  $U_{seuil}$ , relèvent de modèles non linéaires et sont difficiles à gérer.

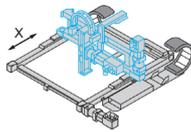
Ci-dessous les résultats d'une campagne d'essais menés en boucle ouverte : Tension constante  $\epsilon_2(t)$  appliquée sur le moteur équivalent et vitesse finale atteinte  $V_\infty(t)$  obtenue en régime permanent. Les deux phénomènes non linéaires évoqués, saturation de la carte de commande et tension de démarrage du moteur, apparaissent très clairement.



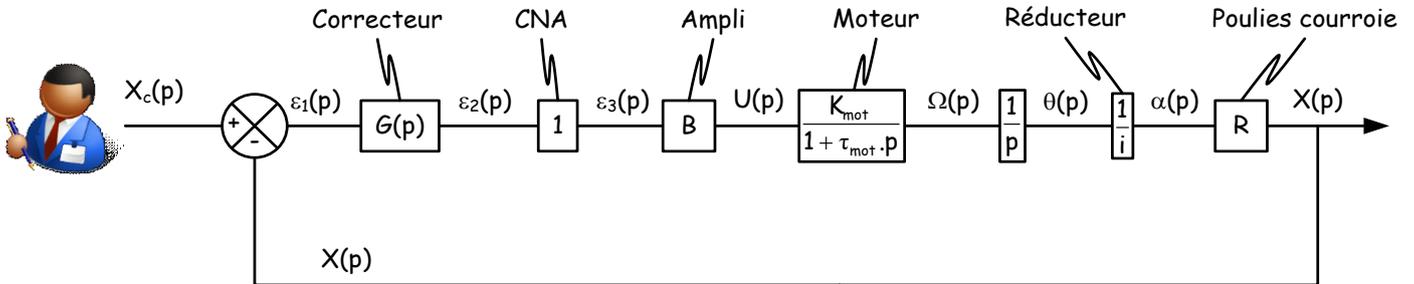
Abscisses : Tension  $\epsilon_2(t)$  appliquée en boucle ouverte  
Ordonnées : Vitesse du chariot atteinte en régime permanent :  $\lim V(t)$

- Résistances de type frottements visqueux. Ces résistances seront modélisées en temps utile si nécessaire en utilisant un modèle linéaire de frottements visqueux :  $C_r(t) = -f_{\omega} \cdot \omega(t)$

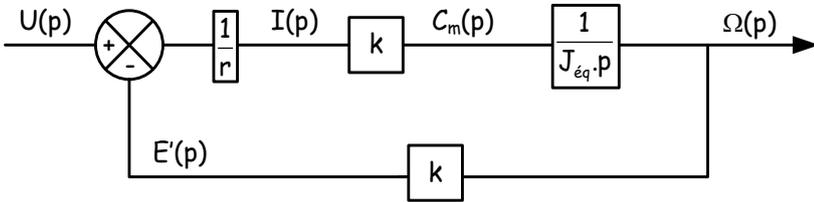
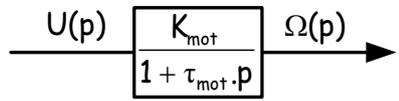


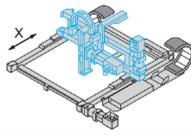


La fonction de transfert du moteur dans le modèle de base s'écrit  $\frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{K_{mot}}{1 + \tau_{mot} \cdot p}$ .



Cette fonction de transfert peut être issue de deux types de modèles selon que l'on souhaite tenir compte ou non du frottement visqueux :

Modèle linéaire sans frottements visqueux	
<p> <math>r</math> : résistance de l'induit  <math>k</math> : constante de couple ou de force contre électromotrice  <math>J_{\acute{e}q}</math> : moment d'inertie ramené sur l'arbre moteur                 </p>  <p style="text-align: center; margin: 10px 0;">↕</p> 	<p>On a ici : <math>\frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{\frac{1}{k}}{1 + \frac{r \cdot J_{\acute{e}q}}{k^2} \cdot p}</math></p> <p>Soit</p> $K_{mot} = \frac{1}{k}$ $\tau_{mot} = \frac{r \cdot J_{\acute{e}q}}{k^2}$



**Modèle linéaire avec frottements visqueux**

$r$  : résistance de l'induit  
 $k$  : constante de couple ou de force contre électromotrice  
 $J_{\text{éq}}$  : moment d'inertie ramené sur l'arbre moteur  
 $f_{\omega}$  : coefficient de frottements visqueux (tous frottements visqueux ramenés sur l'arbre moteur)

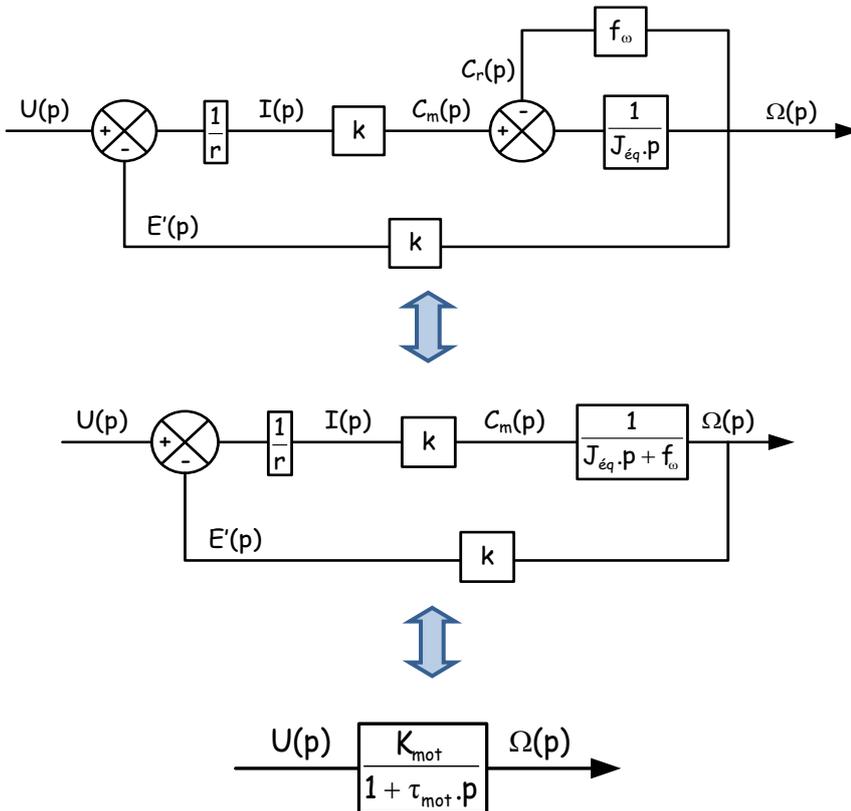
On a maintenant

$$\frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{k}{1 + \frac{r \cdot J_{\text{éq}}}{r \cdot f_{\omega} + k^2} \cdot p}$$

Soit

$$K_{\text{mot}} = \frac{k}{r \cdot f_{\omega} + k^2}$$

$$\tau_{\text{mot}} = \frac{r \cdot J_{\text{éq}}}{r \cdot f_{\omega} + k^2}$$

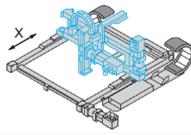


Finalement dans notre modèle de base, on avait choisi comme fonction de transfert du moteur  $\frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{K_{\text{mot}}}{1 + \tau_{\text{mot}} \cdot p}$

... mais cette fonction de transfert pouvait être tout aussi bien celle du moteur non perturbé (aucune résistance passive) ou celle du moteur perturbé uniquement par des résistances passives de type frottement visqueux.

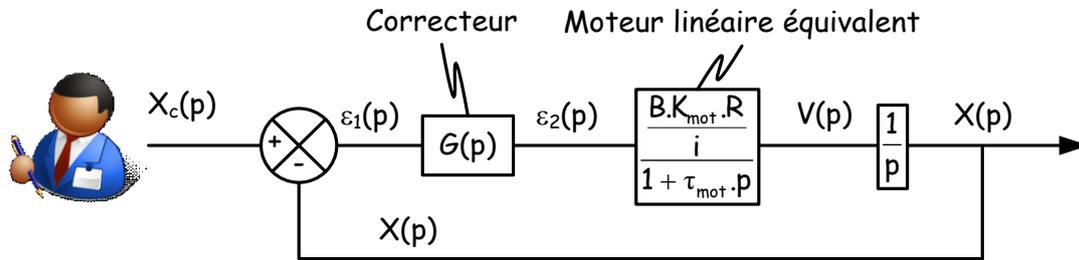
Un modèle de moteur avec résistances passives type frottements visqueux nous amène donc à considérer un moteur virtuel de gain statique  $\frac{k}{r \cdot f_{\omega} + k^2}$  et non  $\frac{1}{k}$

et de constante de temps  $\frac{r \cdot J_{\text{éq}}}{r \cdot f_{\omega} + k^2}$  et non  $\frac{r \cdot J_{\text{éq}}}{k^2}$  : Un moteur qui tourne un peu moins vite et qui est un peu plus rapide que le moteur de base. Vous avez bien lu, un peu plus rapide !

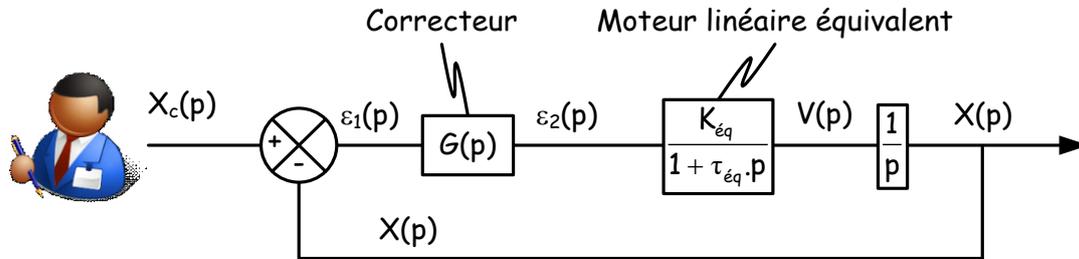


Valeurs numériques pour alimenter notre modèle de base :

On rappelle ci-dessous le modèle de boucle fermée que l'on avait considéré :

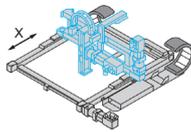


Soit en introduisant les variables  $K_{\acute{e}q}$  et  $\tau_{\acute{e}q}$  :



Pour alimenter notre modèle, il faut donc prendre les valeurs suivantes :

- $K_{\acute{e}q} = \frac{B.K_{mot}.R}{i}$  avec :
  - $K_{mot} = \frac{1}{k}$  sur la base d'un modèle sans frottements visqueux
  - $K_{mot} = \frac{k}{r.f_{\omega} + k^2}$  sur la base d'un modèle avec frottements visqueux
- $\tau_{\acute{e}q} = \tau_{mot}$  avec :
  - $\tau_{mot} = \frac{r.J_{\acute{e}q}}{k^2}$  sur la base d'un modèle sans frottements visqueux
  - $\tau_{mot} = \frac{r.J_{\acute{e}q}}{r.f_{\omega} + k^2}$  sur la base d'un modèle avec frottements visqueux



On peut prendre les données constructeur suivantes pour calculer  $K_{mot}$  et  $\tau_{mot}$

$$k = 0.209 \text{ V}/(\text{rad/s})$$

$$r = 5.1 \Omega$$

$f_{\omega} = 1.35 \cdot 10^{-3} \text{ N.m}/(\text{rad/s})$  : valeur issue d'une campagne de mesure. Le constructeur annonce pour le moteur seul un coefficient de  $0.124 \cdot 10^{-3} \text{ N.m}/(\text{rad/s})$  soit 10 fois moins

$$J_{\acute{e}q} = 2.15 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2$$

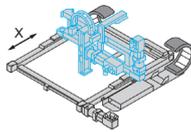
$$B = 4$$

$$R = 24.67 \text{ mm (conserver des mm pour les applications numériques)}$$

Tous calculs faits, on trouve :

	Modèle de connaissance sans frottements visqueux	Modèle de connaissance avec frottements visqueux	Modèle de comportement
$K_{mot}$ (rad/s)/V	4.8	4.13	4
$K_{\acute{e}q} = \frac{B \cdot K_{mot} \cdot R}{i}$ (mm/s)/V	157	136	132
$\tau_{\acute{e}q} = \tau_{mot}$ (ms)	25	22	22

**Nota :** Les valeurs de  $K_{\acute{e}q}$  et  $\tau_{\acute{e}q}$  que l'on avait considérées dans le modèle de base étaient des valeurs issues d'un modèle de comportement : elles intégraient donc les frottements visqueux.



**Écarts modèle-réel : du côté du codeur incrémental**

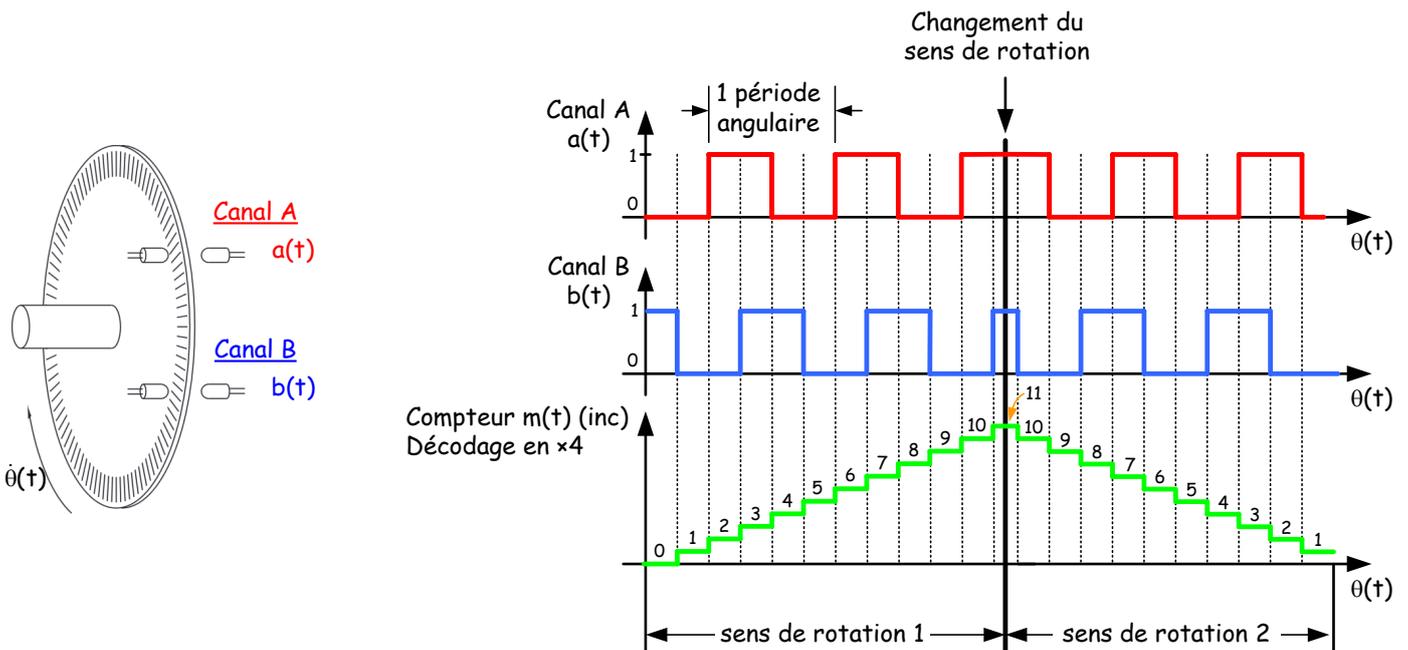
Non continuité : la quantification

**Ctrl + clic pour revenir au sommaire**

La roue codeuse génère des impulsions sur ses deux canaux A et B déphasés d'un quart de période. Le compteur/décompteur s'incrémente ou se décrémente sur tous les fronts montants ou descendants des canaux A ou B : c'est le décodage dit en  $\times 4$ .

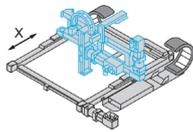
La roue codeuse de Control'X possède 1000 fentes par tour et génère donc 4000 incréments par tour. Ramené sur le chariot et compte tenu du rayon R de poulie et du rapport de réduction i, cela correspond à  $4000 \cdot \frac{i}{2 \cdot \pi \cdot R} = 77$  incréments / mm.

On a donc une résolution (ramenée sur le chariot) de 12.9  $\mu\text{m}$ .



Cette quantification est négligeable. Elle peut être comparée par exemple :

- A la répétabilité de positionnement du chariot annoncée par Schneider à  $\pm 50 \mu\text{m}$
- Au jeu angulaire du réducteur ramené sur le chariot qui est de  $72 \mu\text{m}$  maximum.

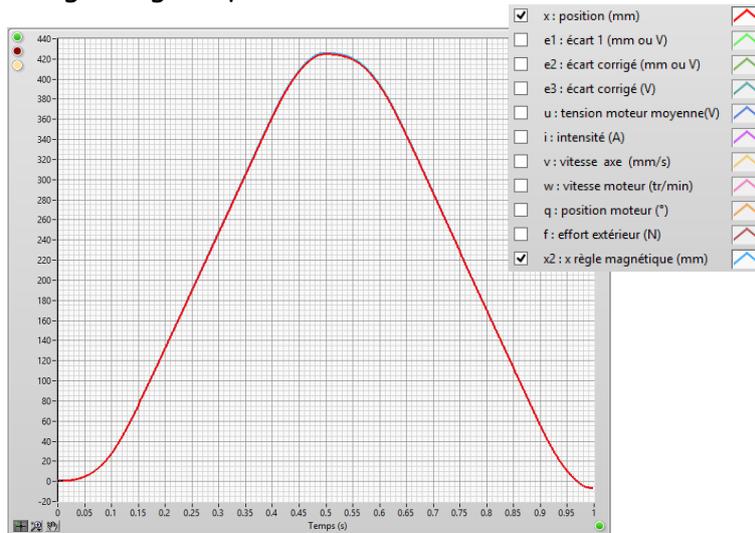


**Ecart model-réel : du côté du moteur**

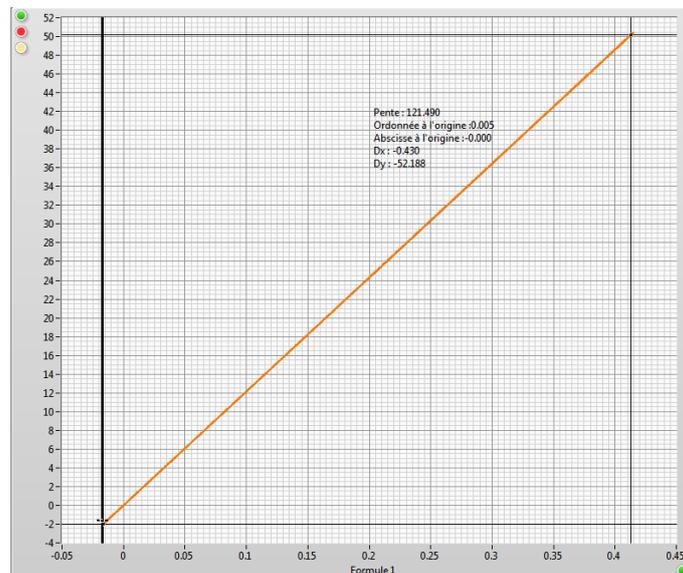
**La mécanique de l'axe : jeu du réducteur, élasticité de l'accouplement et de la courroie**

**Ctrl + clic pour revenir au sommaire**

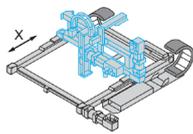
En faisant effectuer un aller-retour au chariot comme celui-ci-dessous, on ne voit quasiment aucune différence entre la position x issue du codeur incrémental monté sur l'arbre moteur et la position x2 issue de la règle magnétique :



En traçant la position de l'angle moteur  $\theta$  (issu du codeur incrémental monté sur l'arbre moteur) en fonction de la position du chariot x2 (issue de la règle magnétique) on obtient un segment de droite : on ne voit aucun effet lié au jeu du réducteur ou à l'élasticité du joint d'accouplement ou de la courroie : pas d'hystérésis notamment. La pente mesuré vaut 121.5 soit quasiment le rapport  $\frac{i}{R}$ .



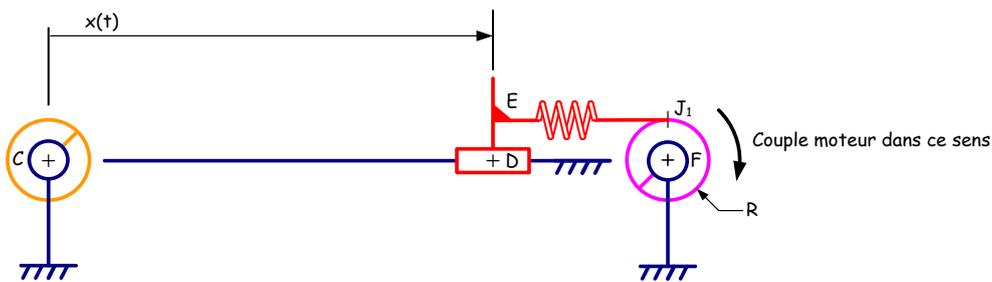
x2(t) en m en abscisses et  $\theta(t)$  en radians en ordonnées



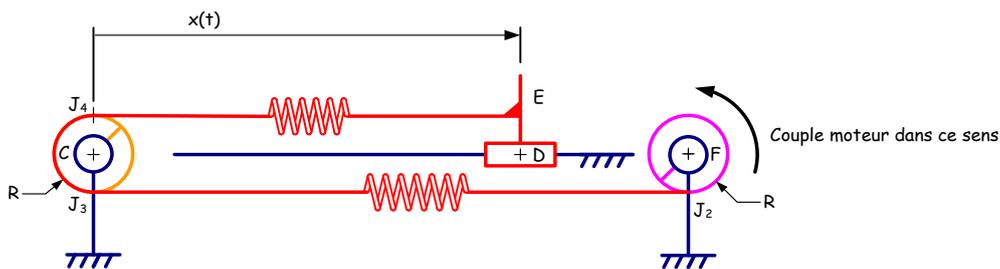
Le jeu du réducteur (10 min d'arc soit 0.0029 rad à priori ramené sur la sortie) pourrait être à l'origine de certaines différences entre les paramètres géométriques d'entrée  $\theta(t)$  et le paramètre géométrique de sortie  $x(t)$ . Ce jeu angulaire  $d\theta$  converti en distance correspond à  $dx = R.d\theta = 70 \mu\text{m}$ . Ce jeu semble être à l'origine de la répétabilité de positionnement de  $50 \mu\text{m}$  annoncée par le constructeur Schneider.

L'élasticité de la courroie pourrait aussi avoir des conséquences. L'élasticité de la courroie  $k_c$  vaut  $k_c = \frac{r_s}{l}$  où  $r_s$  est la raideur spécifique de la courroie ( $0.572 \times 10^6 \text{ N}$ ) et  $l$  la longueur de la courroie.

En faisant l'hypothèse très simplificatrice que le brin mou de la courroie (qui est assez fortement précontrainte contrairement à une chaîne par exemple) transmet une tension nulle et donc que tout l'effort moteur transite par le brin tendu, on a ci-dessous les deux cas de figure extrêmes en fonction de la position du chariot et du sens du couple moteur.

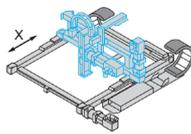


Cas 1 : l'effort moteur transite par une toute petite longueur de courroie : le brin tendu vaut environ 15 cm



Cas 2 : l'effort moteur transite par une grande longueur de courroie : le brin tendu vaut environ 1.5 m

C'est bien sûr dans le cas 2 que la déformation de la courroie risque d'avoir des conséquences importantes sur la relation entrée-sortie géométrique.



La masse de tout l'équipage mobile (chariot + accessoires) vaut sensiblement 2 kg. Lors d'une brusque accélération à  $5g = 50 \text{ m/s}^2$ , l'effort d'inertie  $m.\ddot{x}$  vaut environ 100 N. Cet effort d'inertie est donc à lui seul (sans compter les résistances dans la liaison glissière chariot-bâti), à l'origine d'une déformation de courroie valant  $dx = \frac{m.\ddot{x}}{k_c} = \frac{m.\ddot{x}.l}{r_s}$

On trouve numériquement :  $dx = \frac{2 \times 50 \times 1.5}{0.572 \cdot 10^6} = 260 \mu\text{m}$  ce qui n'est pas négligeable. Cette élasticité ne s'observe pas expérimentalement et ce même pour des essais assez violents.

**Conclusion :** Les "défauts" mécaniques de l'axe ne semblent pas être à l'origine d'écarts importants entre notre modèle de base et le comportement réel observé.

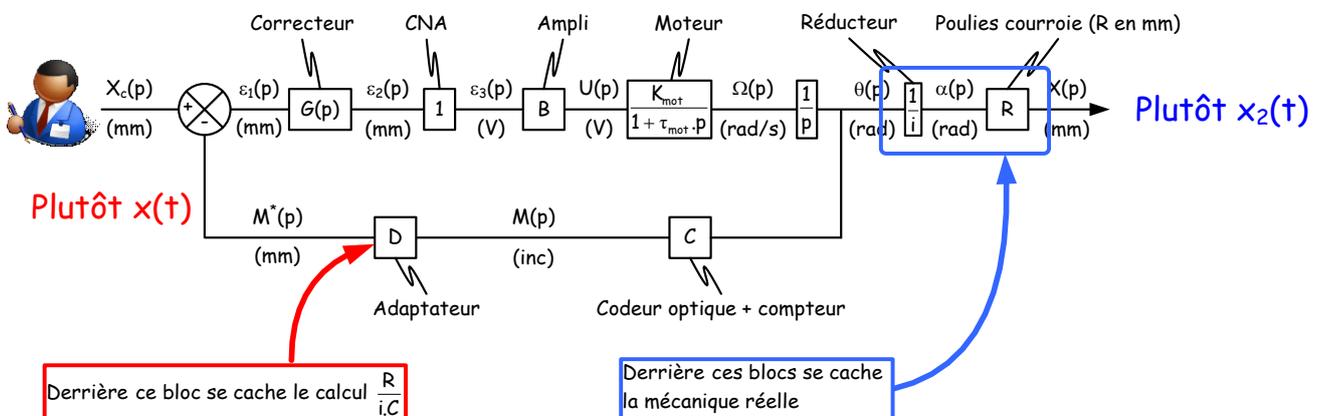
**Nota :** un modèle plus convenable concernant la tension de courroie mais qui n'affecte pas les résultats ci-dessus est celui-ci :  $2.T_0 = T + t$

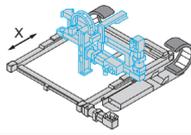
En nommant :

- $T_0$  la précontrainte installée au montage de la courroie entre les deux poulies
- $t$  la tension transitant dans le brin le plus mou de la courroie
- $T$  la tension transitant dans le brin le plus tendu la courroie



**Attention :** ces défauts mécaniques, même s'ils sont à l'extérieur de la boucle d'asservissement, interviennent aussi implicitement dans l'adaptateur de la chaîne de retour (bloc D). Ils interviennent aussi si l'on prend soin d'observer le signal  $x$  issu de la règle magnétique ( $x_2$ ) et non le signal issu du codeur monté sur l'arbre moteur ( $x$ ) pour caractériser les performances du positionnement.



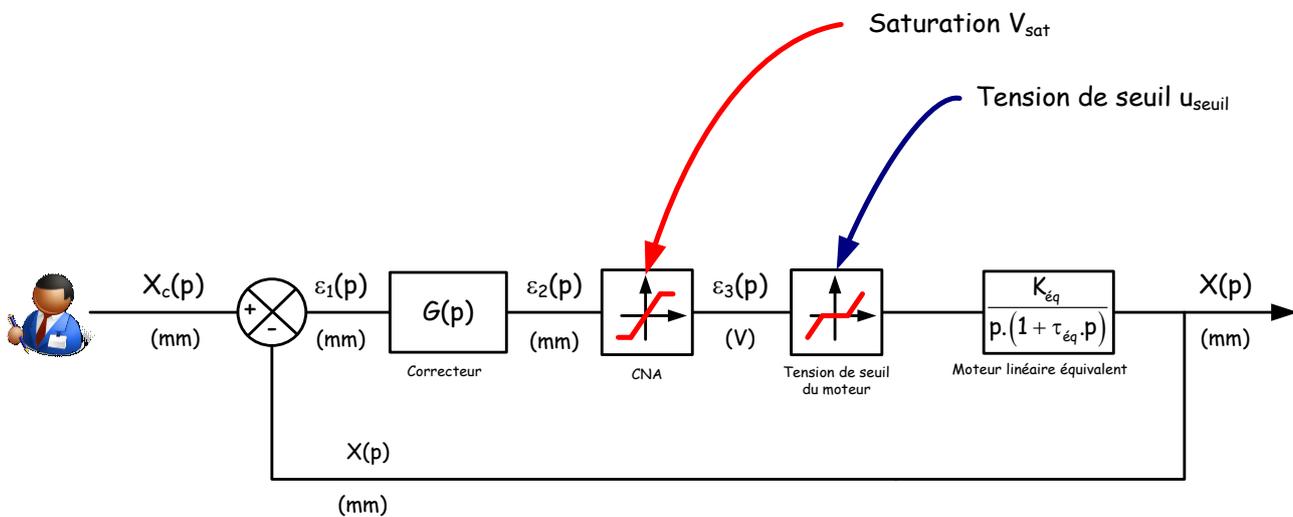


**En résumé : Différences modèle - réel**

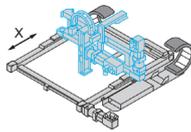
[Ctrl + clic pour revenir au sommaire](#)

Seules les perturbations (frottements secs et visqueux) et la saturation du convertisseur numérique analogique sont à l'origine de gros écarts entre le comportement réel observé et le comportement prévu par le modèle.

On présente ci-dessous un modèle non linéaire qui reflète très bien le comportement de Control'X :

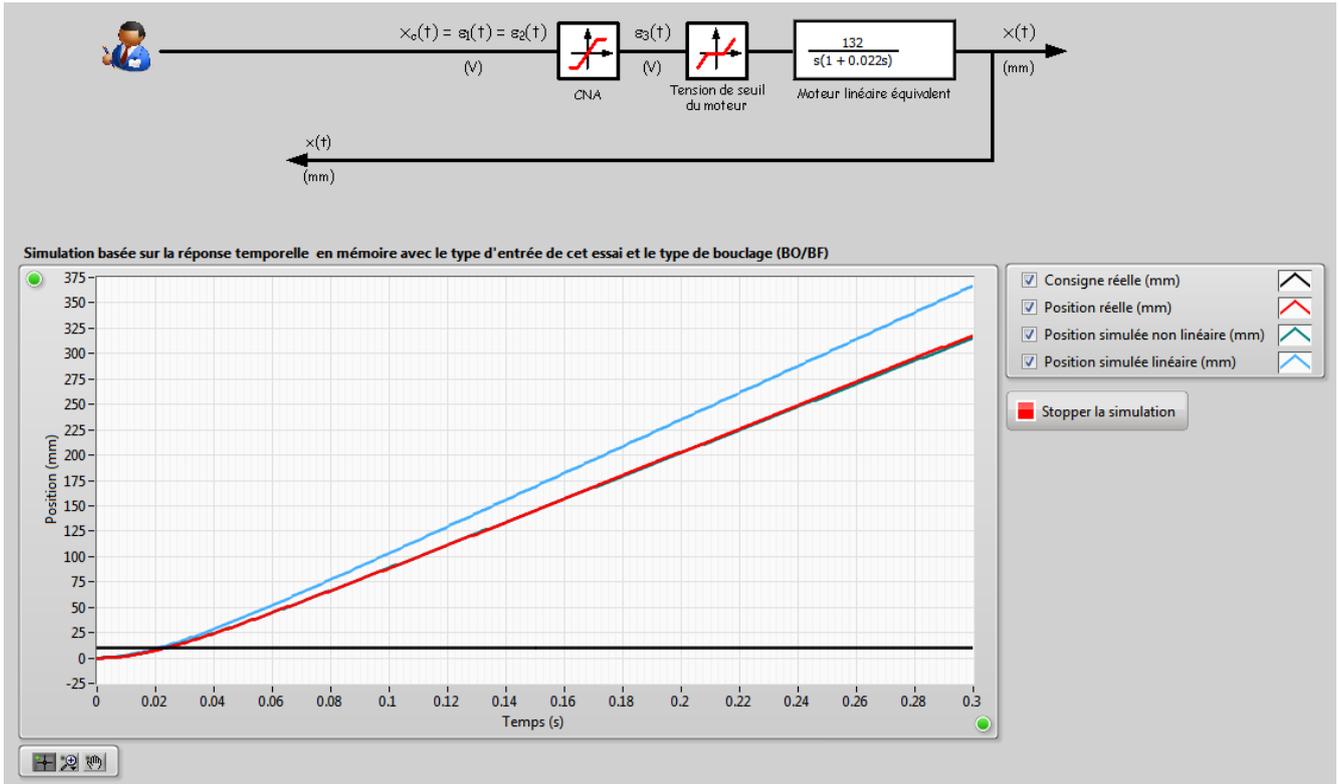


Rappelons que ce modèle permet d'expliquer en particulier que la tension de seuil  $u_{seuil}$  est susceptible de générer des écarts de position maxi  $\varepsilon_{1 \text{ statique max}} = \frac{u_{seuil}}{G}$ .

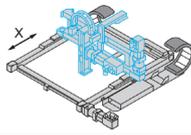


Comparaison modèle linéaire et non linéaire avec le comportement réel en BO sous 10 V

$$H_{BO}(p) = \frac{132}{p \cdot (1 + 0.022 \cdot p)}, V_{sat} = 10 \text{ V et } u_{seuil} 1.5 \text{ V}$$

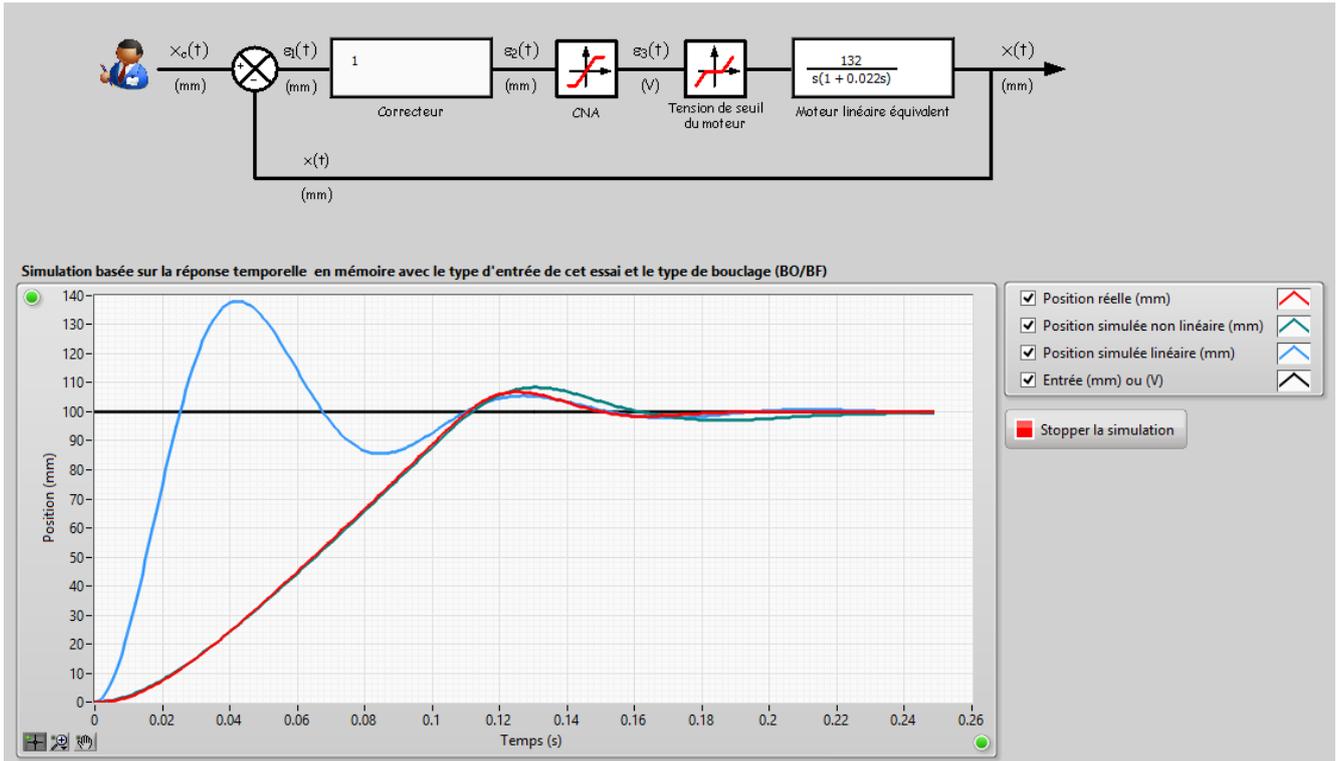


Validation du modèle non linéaire de boucle ouverte

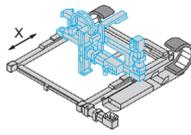


Comparaison modèle linéaire et non linéaire avec le comportement réel en boucle fermée pour une entrée indicielle de 100 mm et un gain de correcteur  $G = 1$ .

$$H_{BO}(p) = \frac{132}{p \cdot (1 + 0.022 \cdot p)}, \quad V_{sat} = 10 \text{ V et } u_{seuil} = 1.5 \text{ V}$$



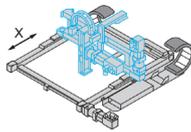
Validation du modèle non linéaire de boucle fermée



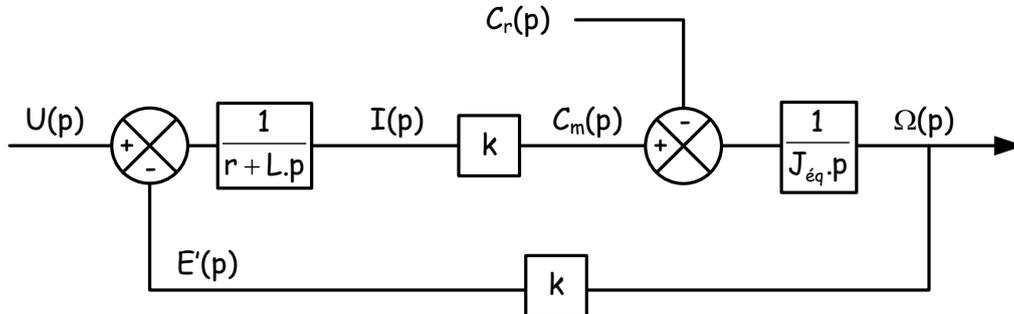
# Modélisation du moteur seul

[Ctrl + clic pour revenir au sommaire](#)

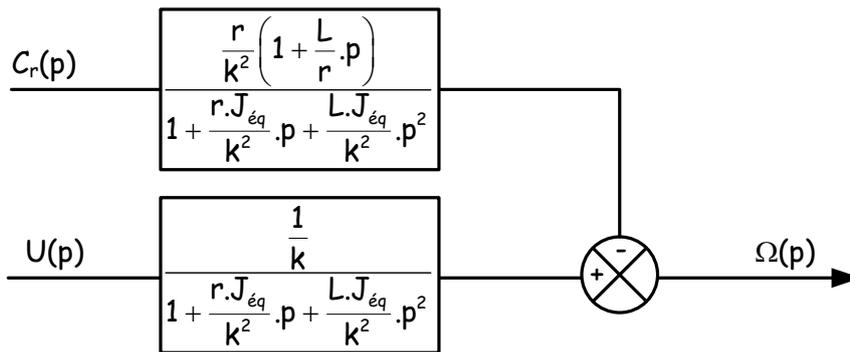
Schéma électrique équivalent	Schéma mécanique équivalent
<p><u>Equation électrique :</u></p> $u(t) = r \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + e'(t)$	<p><u>Paramétrage :</u></p> $\bar{C}(\text{moteur} \rightarrow 1) = C_m(t) \cdot \bar{y}_0$ $\bar{C}(\text{ext} \rightarrow 1) = -C_r(t) \cdot \bar{y}_0$ $\bar{\Omega}_{1/0} = \omega(t) \cdot \bar{y}_0$ <p><u>Equation dynamique :</u></p> $C_m(t) - C_r(t) = J_{\text{eq}} \cdot \dot{\omega}(t)$
Couplages électro-mécaniques	
<p>Domaine électrique</p>	<p>Domaine mécanique</p>
$C_m(t) = k \cdot i(t)$ $e'(t) = k \cdot \omega(t)$	
Valeurs numériques	
<p> <math>r = 5.1 \Omega</math>  <math>L = 3.2 \cdot 10^{-3} \text{ H}</math>  <math>k = 0.21 \text{ SI}</math>  <math>J_{\text{eq}} = J_{\text{mot}} = 3.7 \cdot 10^{-5} \text{ kg.m}^2</math> pour l'arbre moteur seul  <math>J_{\text{eq}} = 2.15 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2</math> si on considère l'inertie équivalente de tout l'équipage mobile ramené sur l'arbre moteur (le moteur intervient pour 17 % de l'inertie totale).         </p>	



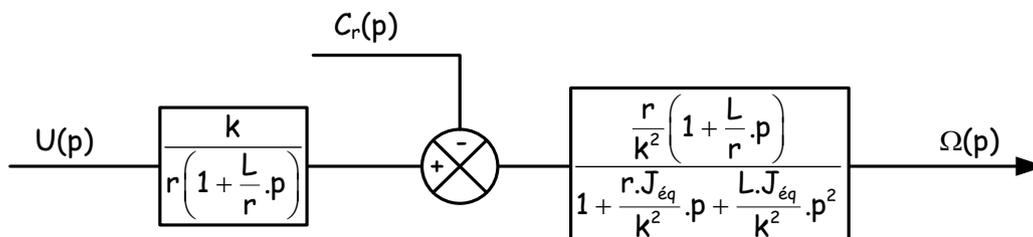
On obtient alors le schéma bloc suivant :

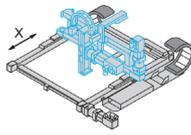


Ou sous forme plus compacte :



ou encore :

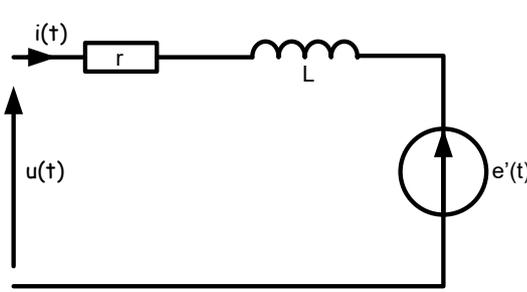
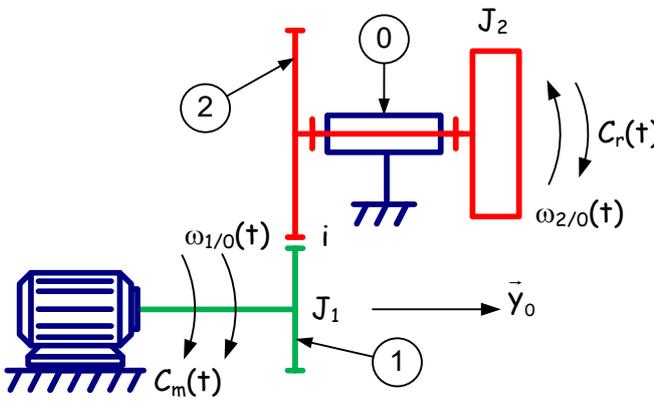


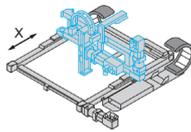


# Transformation du schéma bloc du motoréducteur en schéma d'un moteur équivalent

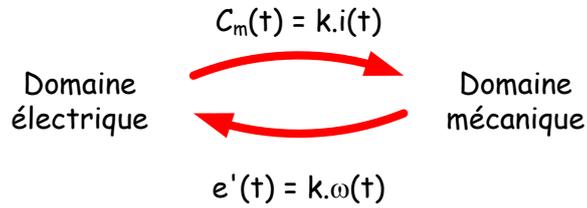
... Le réducteur de Control'X : un réducteur qui ne réduit pas

Ctrl + clic pour revenir au sommaire

Schéma électrique équivalent	Schéma mécanique
 <p><u>Equation électrique :</u></p> $u(t) = r \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + e'(t)$	 <p><u>Paramétrage :</u></p> $\bar{C}(\text{moteur} \rightarrow 1) = C_m \cdot \bar{y}_0$ $\bar{C}(\text{ext} \rightarrow 2) = C_r \cdot \bar{y}_0$ $\bar{\Omega}_{1/0} = \omega_{1/0} \cdot \bar{y}_0$ $\bar{\Omega}_{2/0} = -\omega_{2/0} \cdot \bar{y}_0$ $i = \frac{\omega_{1/0}}{\omega_{2/0}}$ $J_{\text{éq}} = J_1 + \frac{J_2}{i^2} : \text{Moment d'inertie ramené sur l'arbre moteur}$ $J_{\text{éq}}^* = J_{\text{éq}} \cdot i^2 = J_1 \cdot i^2 + J_2 : \text{Moment d'inertie ramené sur l'arbre de sortie du motoréducteur}$ <p><u>Equation dynamique :</u></p> $C_m(t) - \frac{C_r(t)}{i} = J_{\text{éq}} \cdot \dot{\omega}_{1/0}(t)$



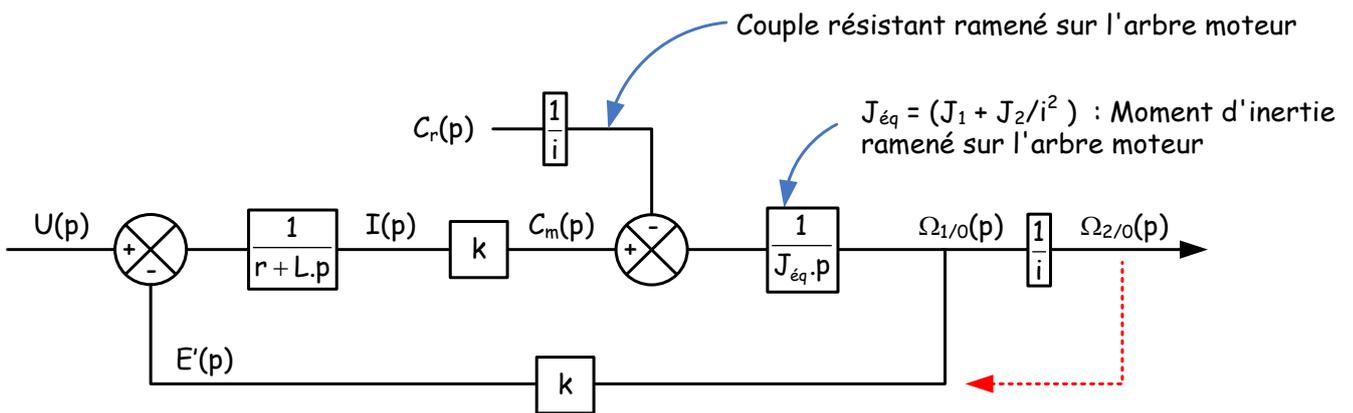
**Couplages électro-mécaniques**

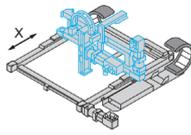


**Valeurs numériques**

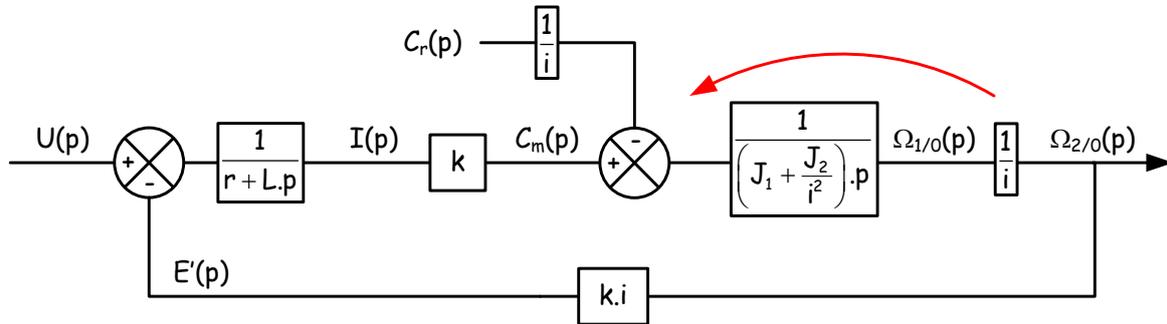
$r = 5.1 \Omega$   
 $L = 3.2 \cdot 10^{-3} H$   
 $k = 0.21 SI$   
 $i = 3$   
 $J_{\acute{e}q} = J_1 + \frac{J_2}{i^2} = 6.26 \times 10^{-5} kg.m^2$  : moteur + réducteur seuls, le tout ramené sur l'arbre moteur  
 $J_{\acute{e}q}^* = J_1 \cdot i^2 + J_2 = 5.63 \times 10^{-4} kg.m^2$  : moteur + réducteur seuls, le tout ramené sur l'arbre de sortie du réducteur

Le schéma bloc traduisant les quatre équations de comportement prend la forme ci-dessous :

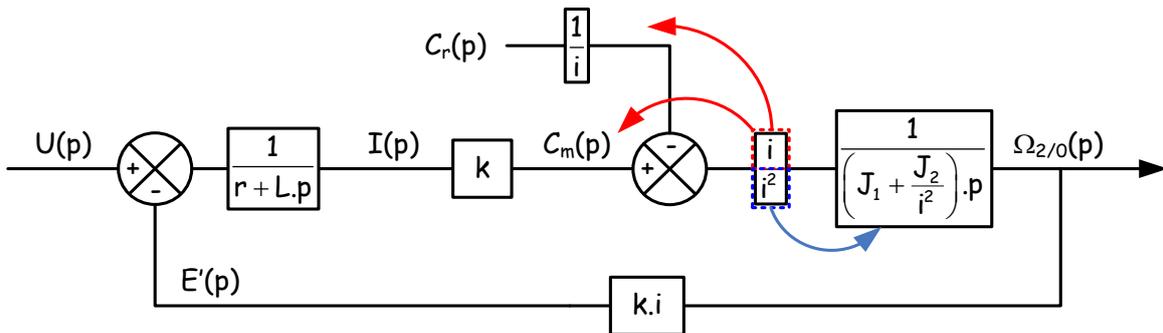




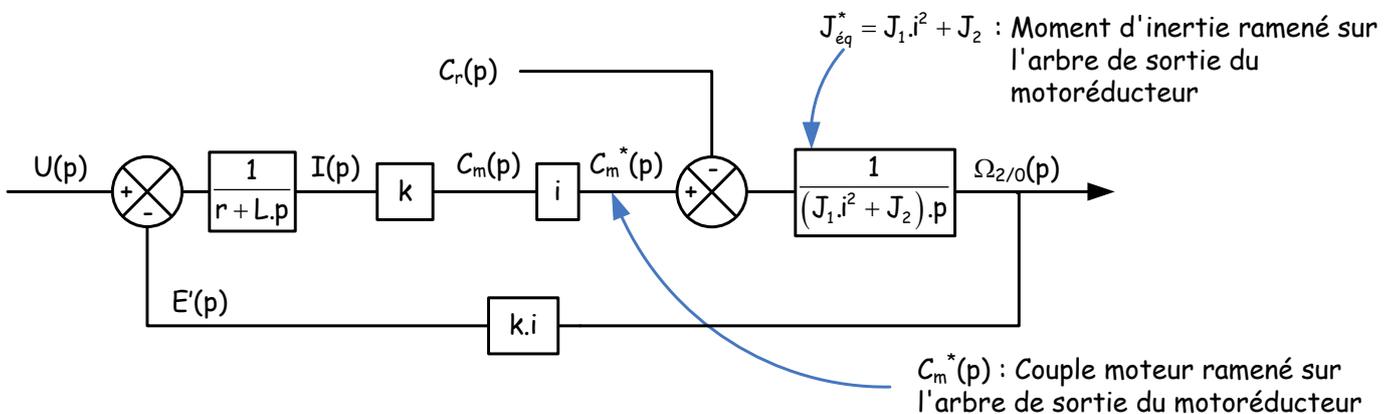
En déplaçant le point de piquage de la chaîne de retour, on obtient le schéma :

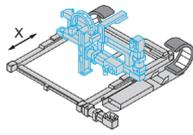


En remplaçant le quotient  $\frac{1}{i}$  par  $\frac{i}{i^2}$  pour faciliter la compréhension de la transformation qui va suivre :

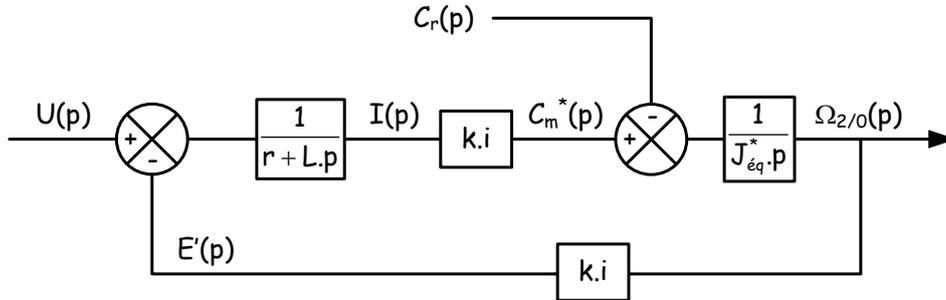


En faisant remonter le facteur  $i$  en amont du soustracteur et en utilisant le quotient  $\frac{1}{i^2}$  pour modifier l'expression du moment d'inertie, on fait apparaître le couple moteur en sortie de motoréducteur  $C_m^*(t)$  et le moment d'inertie équivalent mais cette fois ramené sur l'arbre de sortie du motoréducteur  $J_{\text{éq}}^*$  :

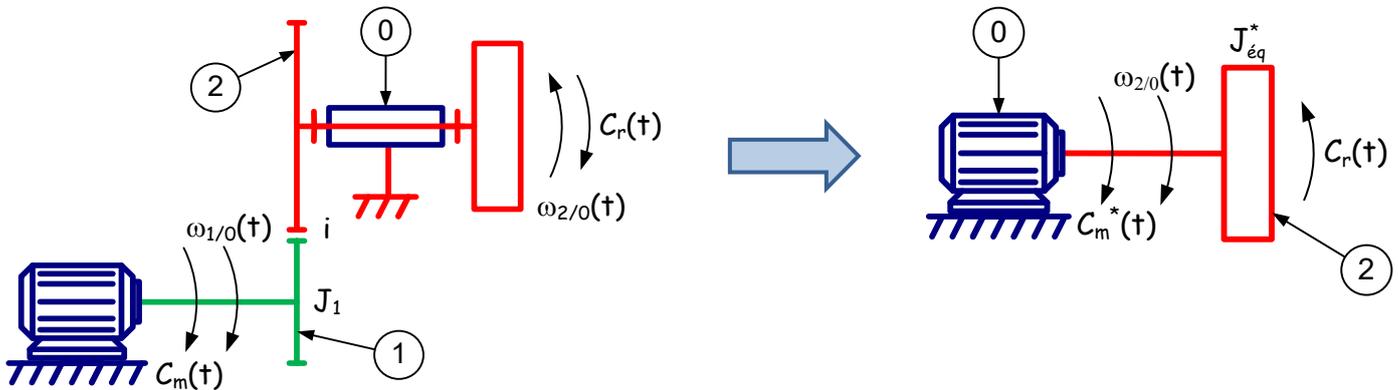




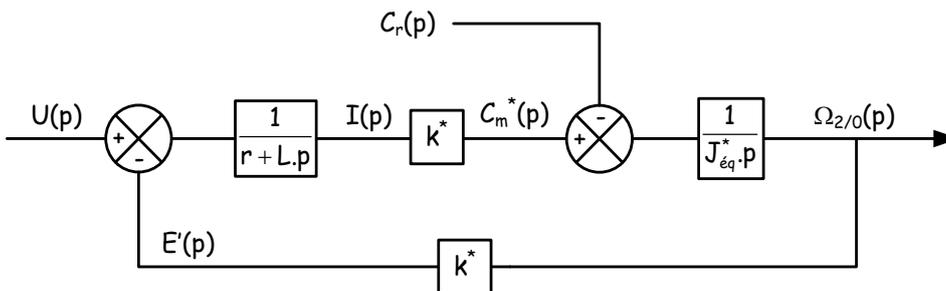
Une dernière transformation fait apparaître le coefficient  $k.i$  qui est le coefficient de force contre électromotrice ou le coefficient de couple mais cette fois en considérant le motoréducteur dans son ensemble et non plus le moteur seul.

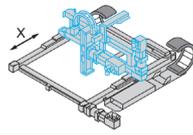


On a maintenant le schéma bloc du motoréducteur qui met en évidence que tout se passe comme si on avait affaire à un moteur "équivalent" : Un moteur tournant moins vite mais avec plus de couple. Le coefficient de force contre électromotrice ou coefficient de couple a augmenté ( $i = 3$ ) et le moment d'inertie ramené sur l'arbre de sortie du motoréducteur aussi.



Les caractéristiques mécaniques du moteur seul n'apparaissent plus. En effectuant le changement de variable  $k^* = k.i$  qui est le coefficient de couple ou de force contre électromotrice du moteur équivalent on a alors :

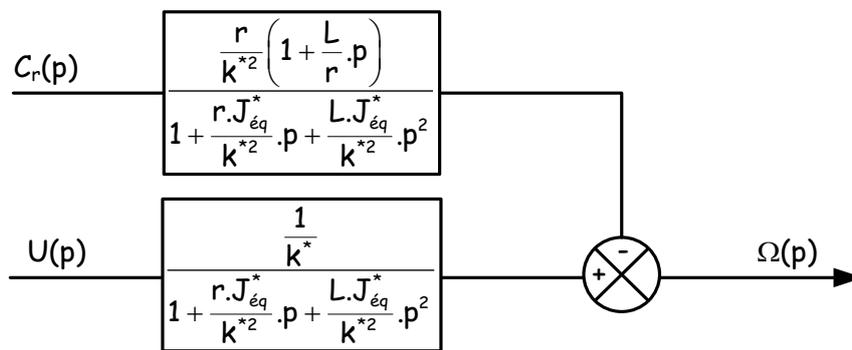




Cette transformation met aussi et surtout en évidence que le gain  $k$  joue le même rôle que le rapport de réduction ( $k^* = k.i$ ) : une grosse réduction ( $i$  grand) a le même effet qu'un gros gain  $k$ .

Le moteur de Control'X a à la base un coefficient  $k$  important pour un moteur de 110 W. Avec le réducteur de rapport 3, le coefficient équivalent  $k^*$  est particulièrement important : on a donc un actionneur qui a puissance donnée tourne "lentement" mais présente un couple moteur "important".

On a là encore le schéma bloc condensé :



En nommant  $U_0$  la tension d'alimentation supposée constante et  $C_{r0}$  un couple résistant constant appliqué sur le motoréducteur, on obtient une vitesse de rotation en régime permanent

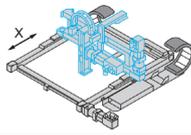
$$\omega_0 = \frac{1}{k^*} \cdot U_0 - \frac{r}{k^{*2}} \cdot C_{r0}$$

D'autre part, en régime permanent  $C_{m0} = C_{r0}$  donc  $\omega_0 = \frac{1}{k^*} \cdot U_0 - \frac{r}{k^{*2}} \cdot C_{m0}$

Ou encore  $C_{m0} = \frac{k^*}{r} \cdot U_0 - \frac{k^{*2}}{r} \cdot \omega_0$  : c'est l'équation de la courbe caractéristique du moteur dans le plan ( $C, \omega$ ).

Avec la présence du réducteur, la courbe caractéristique du moteur se transforme en courbe caractéristique du motoréducteur : Sous une même tension constante d'alimentation  $U_0$ , on a un motoréducteur qui est moins sensible à la charge que le moteur seul.

**N.B.** : Plus la pente est raide, moins le moteur est sensible à la charge.



Courbe caractéristique du moteur seul	Courbe caractéristique du motoréducteur (vue en sortie de réducteur)
<p>Le réducteur de Control'X (<math>i = 3</math>) rend la pente du motoréducteur 9 fois plus raide que celle du moteur seul.</p> <p>A tension d'alimentation <math>U_0</math> donnée, la vitesse à vide en sortie de motoréducteur est 3 fois plus petite et le couple "arbre bloqué" ou couple de démarrage est 3 fois plus élevé que celui du moteur sans réducteur : La pente du motoréducteur est bien 9 fois plus raide que la pente du moteur seul.</p>	

Tableau 1

Une question que l'on est tenté de se poser :

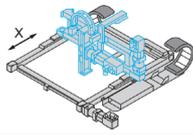
Sous charge résistante  $C_{r0}$  donnée, un réducteur réduit-t-il nécessairement la vitesse ?

Moteur non chargé, c'est évident, la réponse est oui  $\frac{U_0}{k} > \frac{U_0}{k^3}$  mais qu'en est-il sous charge ?

Une réduction nous laisse penser que oui : la sortie va tourner moins vite. Mais d'un autre côté, le moteur est moins chargé, il a donc tendance à tourner plus vite.

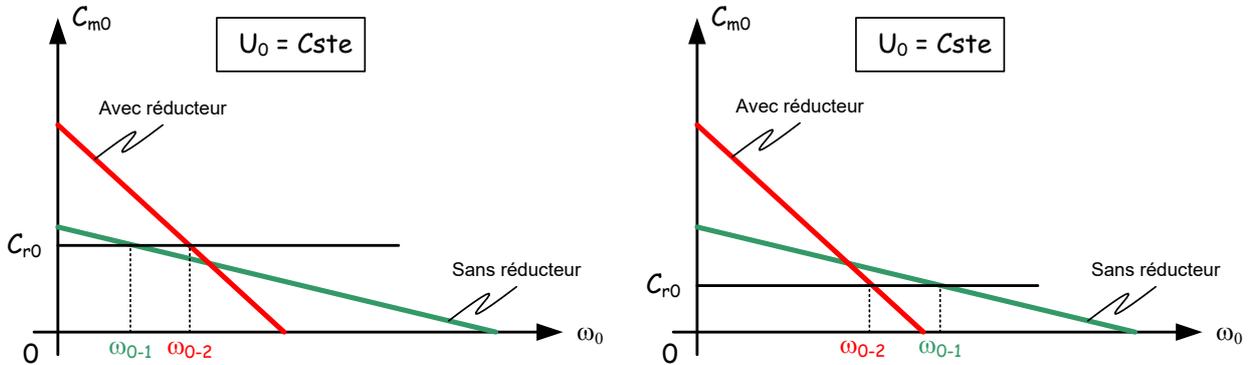
Sans réducteur, on aurait fini par avoir en sortie de moteur une vitesse  $\omega_{0-1} = \frac{1}{k} \cdot U_0 - \frac{r}{k^2} \cdot C_{r0}$

Avec le réducteur, on aura une vitesse (en sortie de motoréducteur)  $\omega_{0-2} = \frac{1}{k^3} \cdot U_0 - \frac{r}{k^5} \cdot C_{r0}$



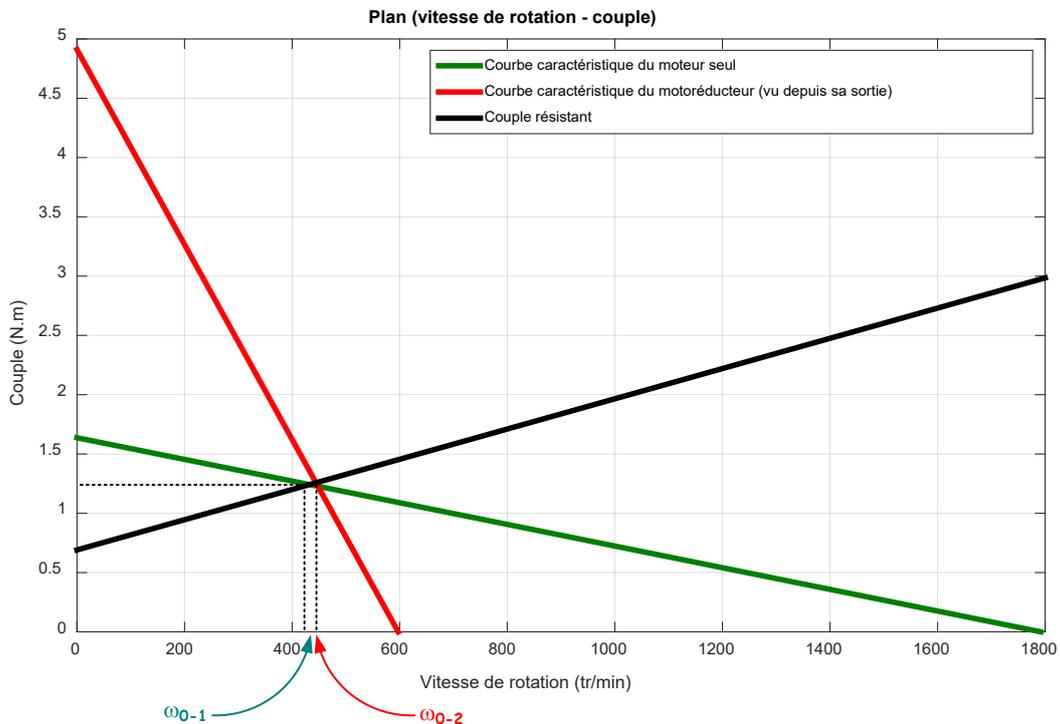
Question : Sous quelle condition peut-on avoir  $\omega_{0-2} > \omega_{0-1}$  ?

Éléments de réponse : Cela dépend de  $C_{r0}$  !



La présence du frottement visqueux rend ce constat encore plus flagrant.

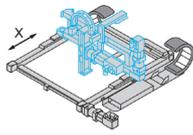
Sur Control'X, en faisant le même raisonnement mais en intégrant les frottements visqueux, on met en évidence que le réducteur ne réduit pas la vitesse de rotation !



Valeurs numériques du modèle :

Couple de frottement sec  $C_{frott} = 0.69 \text{ N.m}$

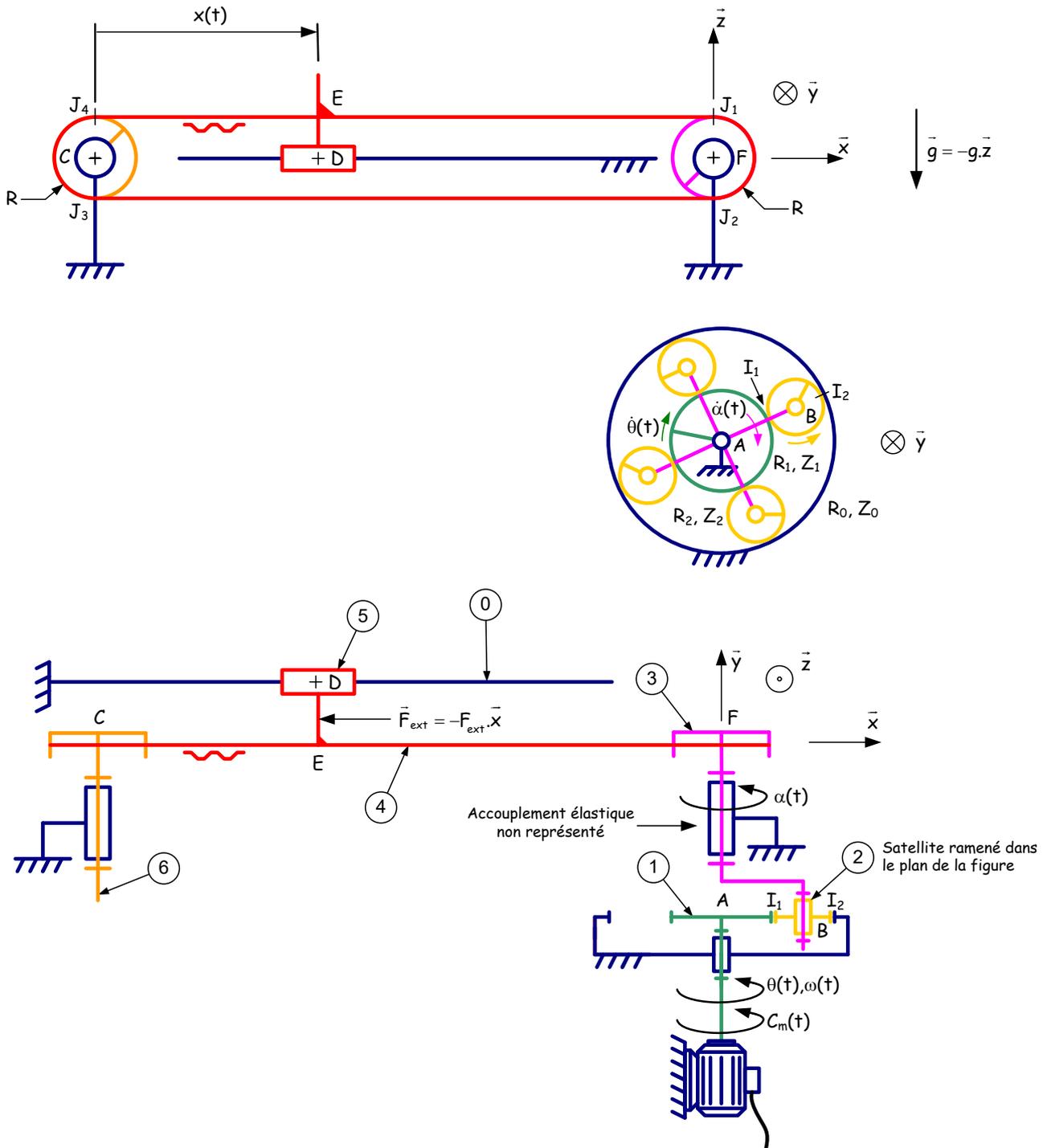
Constante de couple de frottement visqueux :  $f_{\omega} = 0.0122 \text{ N.m/(rad.s)}$

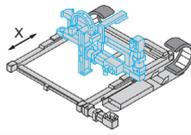


# Modèle mécanique

[Ctrl + clic pour revenir au sommaire](#)

Schéma mécanique





## Paramétrage

### Paramétrage des pièces

- 0 : bâti  
 1 : arbre moteur  
 2 : un des quatre satellites du réducteur  
 3 : poulie crantée en sortie de réducteur + le joint d'accouplement élastique (non représenté)  
 4 : courroie  
 5 : chariot  
 6 : autre poulie crantée

### Paramétrage géométrique

$$x = \overline{CD} \cdot \vec{x}$$

R : rayon primitif de la poulie crantée. R = 24.67 mm

i : rapport de réduction du réducteur (rapport entrée sur sortie :  $i = \frac{\dot{\theta}}{\dot{\alpha}} = 3$ )

$Z_1 = 42$  dents,  $Z_2 = 21$  dents  $Z_0 = 84$  dents

### Paramétrage cinématique :

$$\vec{\Omega}_{1/0} = \omega_{1/0} \cdot \vec{y} = \omega \cdot \vec{y} = \dot{\theta} \cdot \vec{y}$$

$$\vec{\Omega}_{3/0} = \omega_{3/0} \cdot \vec{y} = \dot{\alpha} \cdot \vec{y}$$

$$\vec{V}(E \in 5/0) \cdot \vec{x} = v \cdot \vec{x}$$

### Paramétrage des efforts :

$$\vec{C}(\text{moteur} \rightarrow 1) = C_m \cdot \vec{y}$$

$$\vec{F}(\text{ext} \rightarrow 5) = -F_{\text{ext}} \cdot \vec{x}$$

$$\vec{g} = -g \cdot \vec{z} : \text{accélération de la pesanteur}$$

### Paramétrage inertiel :

$I_1$  : Moment d'inertie de l'arbre moteur + génératrice tachymétrique + codeur incrémental (sans l'arbre d'entrée du réducteur)

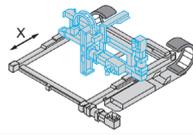
$I_R$  : Moment d'inertie de tout le réducteur, ramené sur son entrée

$I_3$  : Moment d'inertie de la poulie 3 + accouplement (sans l'arbre de sortie du réducteur)

$m_4$  : masse de la courroie

$m_5$  : masse du chariot

$I_6$  : Moment d'inertie de la poulie folle



### Hypothèses

- Courroie non dissipative

La courroie n'étant pas un solide, il faut pouvoir justifier dans le théorème de l'énergie cinétique que la puissance dissipée en son sein est nulle. (Puissance des actions mécaniques de cohésion).

- Courroie inextensible

Hypothèse nécessaire pour pouvoir considérer la courroie comme un solide rigide entre les points de tangence courroie-poulies : bref pour pouvoir utiliser la formule de Varignon  $\bar{V}(E \in 4/O) = \bar{V}(J_1 \in 4/O)$  par exemple pour un sens d'enroulement : lorsque le brin tendu de la courroie est le brin supérieur droit  $[EJ_1]$  par exemple.

- Courroie s'enroulant et se déroulant sans glisser sur la poulie motrice

Pour pouvoir utiliser la relation de couplage cinématique  $V = R \cdot \dot{\alpha}$  qui vient de l'égalité  $\bar{V}(J_1 \in 4/O) = \bar{V}(J_1 \in 3/O)$  lorsque le brin tendu de la courroie est le brin supérieur droit  $[EJ_1]$  par exemple.

- Liaisons parfaites

Pour le modèle de départ en tout cas. On verra qu'il y a des frottements secs (ou des résistances passives type résistances au roulement qui se modélisent de la même façon).

Dans un second temps, on pourra aussi tenir compte de frottements visqueux qu'on ne doit pas forcément négliger selon la finesse du modèle visé.

- Référentiel O galiléen

Ce n'est finalement pas une mince hypothèse. Si Control'X est posé sur une table trop souple, qui se déforme pendant les accélérations par exemple, des efforts d'inertie supplémentaires non négligeables apparaissent.

Control'X accélère en effet à près de 5 g au démarrage.

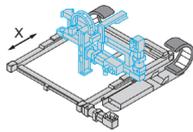
### Equation dynamique

Par application du théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble des pièces mobiles, on trouve l'équation dynamique :

$$C_m(t) - \frac{R}{i} \cdot F_{ext}(t) = J_{\acute{e}q} \cdot \dot{\omega}_{1/O}(t)$$

$$\text{où } J_{\acute{e}q} = I_1 + I_R + \frac{I_3 + I_6 + (m_4 + m_5) \cdot R^2}{i^2}$$

A.N. :  $J_{\acute{e}q} = 2.15 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2$

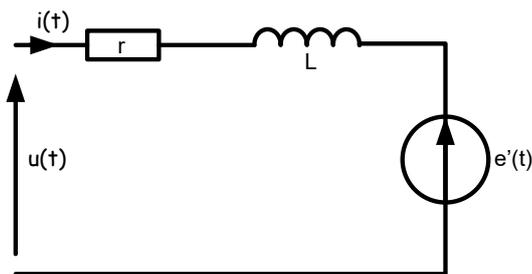


## Modèles plus évolués

# Transformation du schéma bloc de Control'X en schéma d'un moteur linéaire équivalent

[Ctrl + clic pour revenir au sommaire](#)

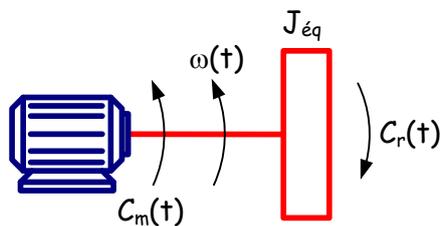
### Schéma électrique équivalent



Equation électrique :

$$u(t) = r \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + e'(t)$$

### Schéma mécanique équivalent

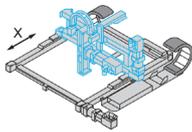


Equation de mouvement :

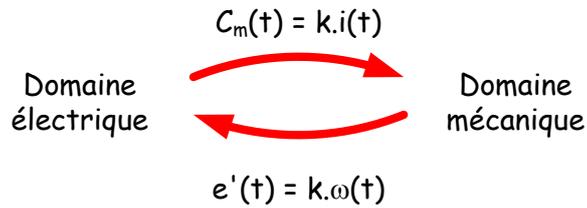
$$C_m(t) - C_r(t) = J_{\text{eq}} \cdot \dot{\omega}(t)$$

Equation cinématique :

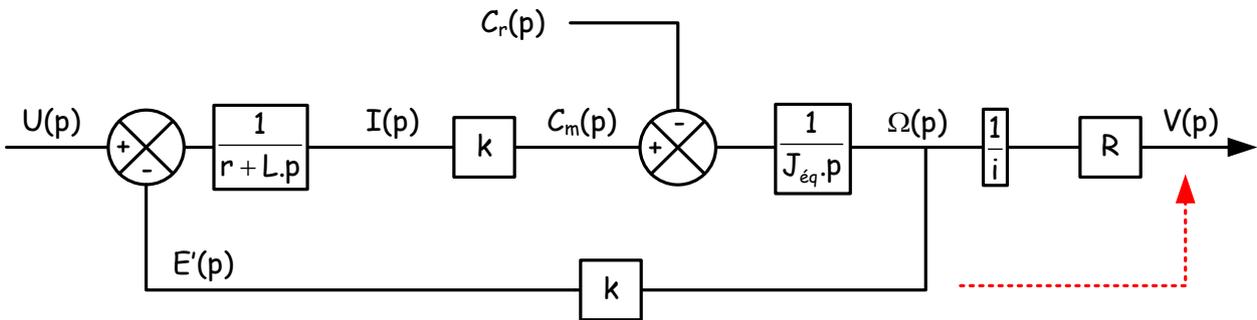
$$v(t) = R \cdot \dot{\alpha}(t) = \frac{R}{i} \cdot \dot{\theta}(t) = \frac{R}{i} \cdot \omega(t)$$



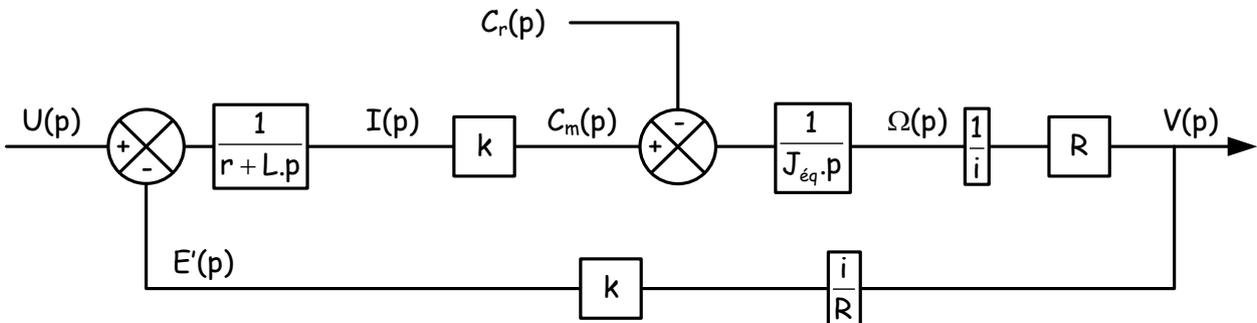
**Couplages électro-mécaniques**

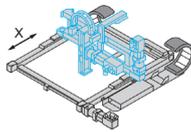


On part du schéma ci-dessous :  $J_{\text{eq}}$  représente le moment d'inertie de toutes les pièces mobiles ramené sur l'arbre du moteur.

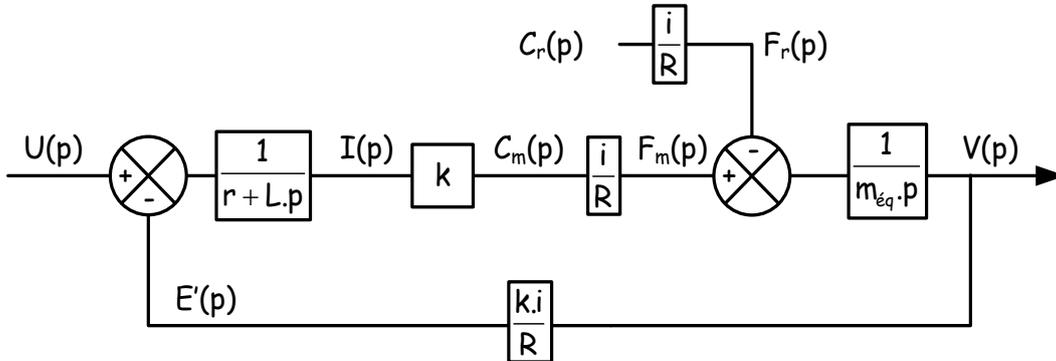


En déplaçant le point de piquage de la chaîne de retour, on obtient :



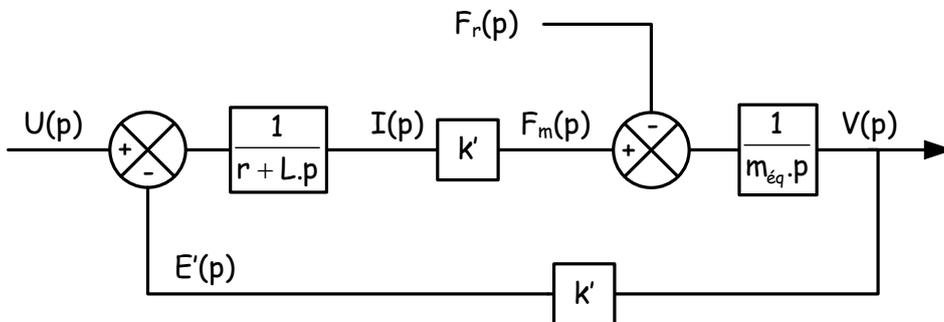


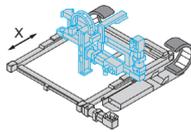
En posant  $m_{\text{eq}} = J_{\text{eq}} \cdot \frac{i^2}{R^2}$ , on obtient le schéma ci-dessous. Il transforme le couple résistant ramené sur le moteur  $C_r(t)$  en force résistante ramenée sur le chariot  $F_r(t)$  et de même, il transforme le couple moteur  $C_m(t)$  en force motrice ramenée sur le chariot  $F_m(t)$ .



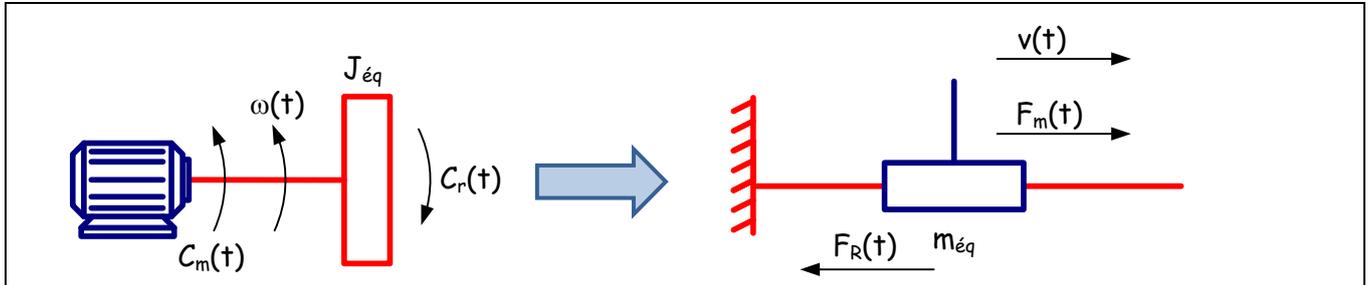
En introduisant le paramètre  $k' = \frac{k \cdot i}{R}$ , on obtient le schéma d'un moteur linéaire équivalent :

On remarque que les grandeurs  $R$ ,  $i$  et  $k$  jouent des rôles similaires : plus le coefficient  $k$  est grand, plus la réduction  $i$  est importante et plus le rayon de poulie  $R$  est petit et plus on aura un moteur équivalent qui développera une force motrice importante avec une vitesse de translation faible.





Tout se passe maintenant comme si on avait affaire non plus à un moteur rotatif mais à un moteur linéaire



Le moteur linéaire correspond en fait au moteur rotatif mais ramené sur le chariot. Les caractéristiques mécaniques du moteur seul n'apparaissent plus.

$$\begin{cases} J_{\text{éq}} \cdot \dot{\omega}(t) = C_m(t) - C_r(t) \text{ et } v(t) = \frac{R}{i} \cdot \omega(t) \\ e'(t) = k \cdot \omega(t) \\ C_m(t) = k \cdot i(t) \\ u(t) = r \cdot i(t) + e'(t) \end{cases}$$

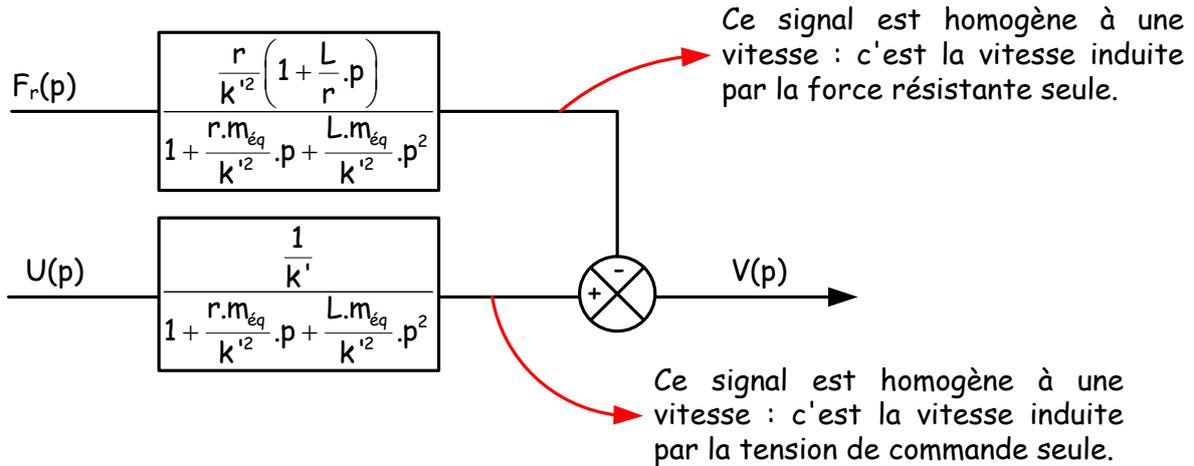
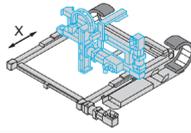


$$\begin{cases} m_{\text{éq}} \cdot \dot{V}(t) = F_m(t) - F_r(t) \\ e'(t) = k' \cdot v(t) \\ F_m(t) = k' \cdot i(t) \\ u(t) = r \cdot i(t) + e'(t) \end{cases}$$

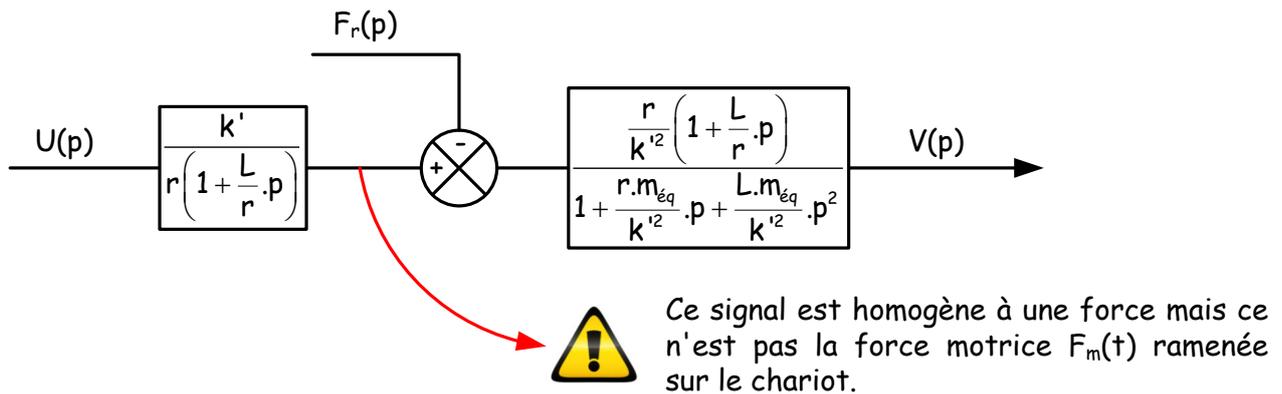
Le moteur linéaire équivalent est un moteur dont l'entrée est une tension  $u(t)$ , la perturbation une force  $F_r(t)$  et la sortie la vitesse linéaire  $v(t)$ . Ce moteur génère :

- Une force motrice proportionnelle au courant :  $F_m(t) = k' \cdot i(t)$
- Une force contre électromotrice proportionnelle à la vitesse du chariot :  $e'(t) = k' \cdot v(t)$

On retrouve alors le schéma bloc du moteur linéaire équivalent sous une forme plus compacte :



ou encore :



Valeurs numériques pour alimenter ces modèles :

$$r = 5.1 \Omega$$

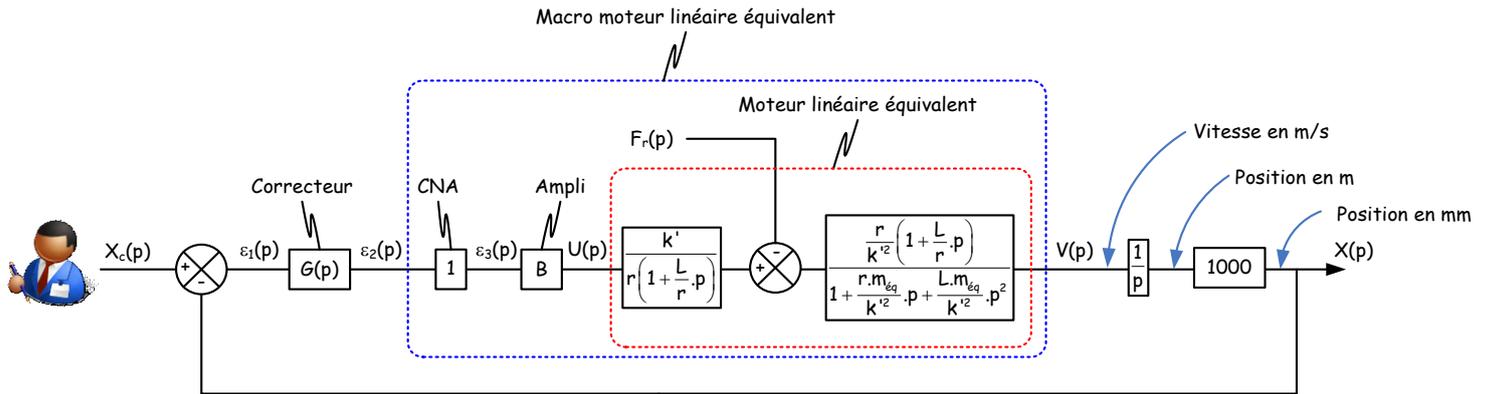
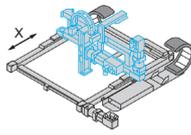
$$L = 3.2 \text{ mH}$$

$$m_{\text{eq}} = 3.2 \text{ kg (tout l'équipage mobile)}$$

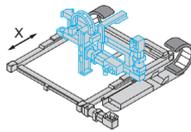
$$k' = \frac{k_i}{R} = 25.5 \text{ N/A ou V/(m/s)}$$

$$B = 4$$

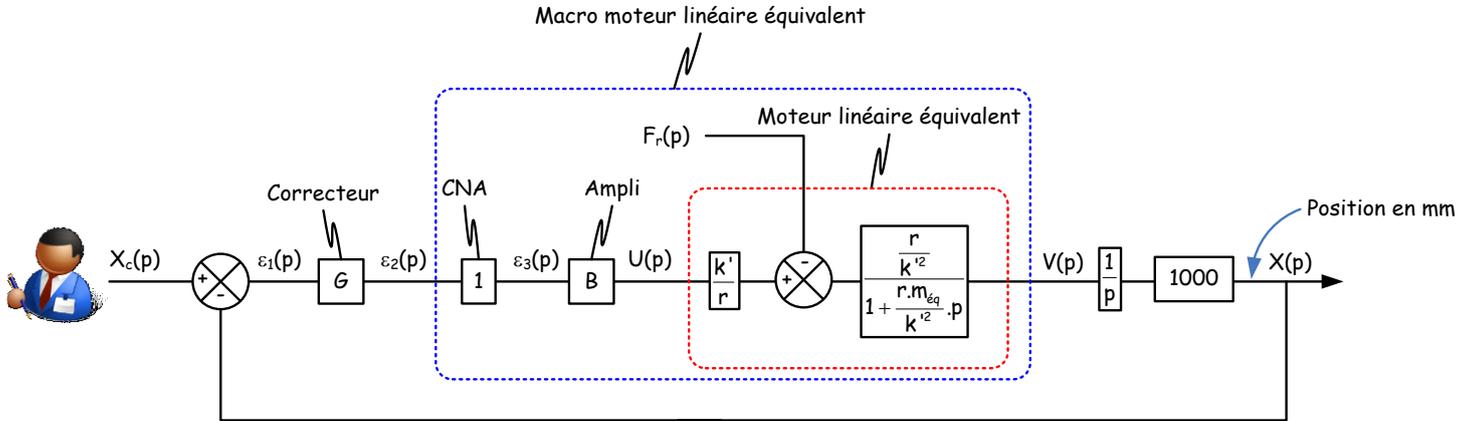
Lorsque ce modèle de moteur linéaire équivalent est intégré au schéma bloc de l'asservissement de position, cela donne le schéma :



Bien penser à multiplier dans les modèles la position par 1000 pour l'avoir en mm et refléter correctement ce qu'il se passe sous Control'Drive. La grandeur qui arrive vers la borne moins du soustracteur de l'asservissement doit être en mm. Si ce n'est pas le cas, il manque un rapport 1000 dans la boucle ouverte.



**Simplification :** Constante de temps électrique négligée devant la constante de temps mécanique, gain proportionnel  $G(p) = G$ .



On a alors les relations :

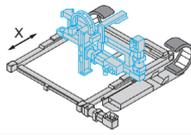
Fonctions de transfert vis à vis de la consigne et de la perturbation

$$X(p) = \frac{1}{1 + \frac{k'}{1000 \cdot B \cdot G} \cdot p + \frac{r \cdot m_{\text{eq}}}{1000 \cdot B \cdot G \cdot k'} \cdot p^2} \cdot X_c(p) - \frac{\frac{r}{k' \cdot B \cdot G}}{1 + \frac{k'}{1000 \cdot B \cdot G} \cdot p + \frac{r \cdot m_{\text{eq}}}{1000 \cdot B \cdot G \cdot k'} \cdot p^2} \cdot F_r(p)$$

Fonctions de transfert pour exprimer l'écart statique en fonction des entrées  $X_c(p)$  et  $F_r(p)$

$$\varepsilon_1(p) = \frac{\frac{k'}{1000 \cdot B \cdot G} \cdot p + \frac{r \cdot m_{\text{eq}}}{1000 \cdot B \cdot G \cdot k'} \cdot p^2}{1 + \frac{k'}{1000 \cdot B \cdot G} \cdot p + \frac{r \cdot m_{\text{eq}}}{1000 \cdot B \cdot G \cdot k'} \cdot p^2} \cdot X_c(p) + \frac{\frac{r}{k' \cdot B \cdot G}}{1 + \frac{k'}{1000 \cdot B \cdot G} \cdot p + \frac{r \cdot m_{\text{eq}}}{1000 \cdot B \cdot G \cdot k'} \cdot p^2} \cdot F_r(p)$$

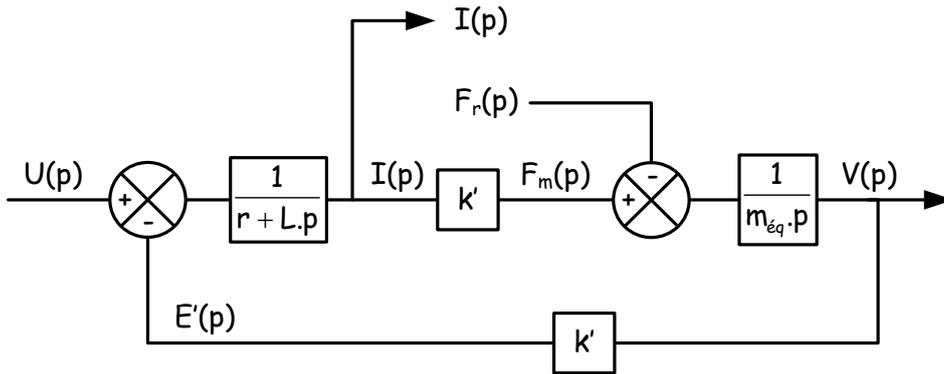
Ces deux fonctions de transfert sont utiles si l'entrée et la perturbation ne rentrent pas dans le cadre des théorèmes du cours (classe de la boucle ouverte et type d'entrée)



**Modèle pour validation des ondulations de vitesse et de courant**

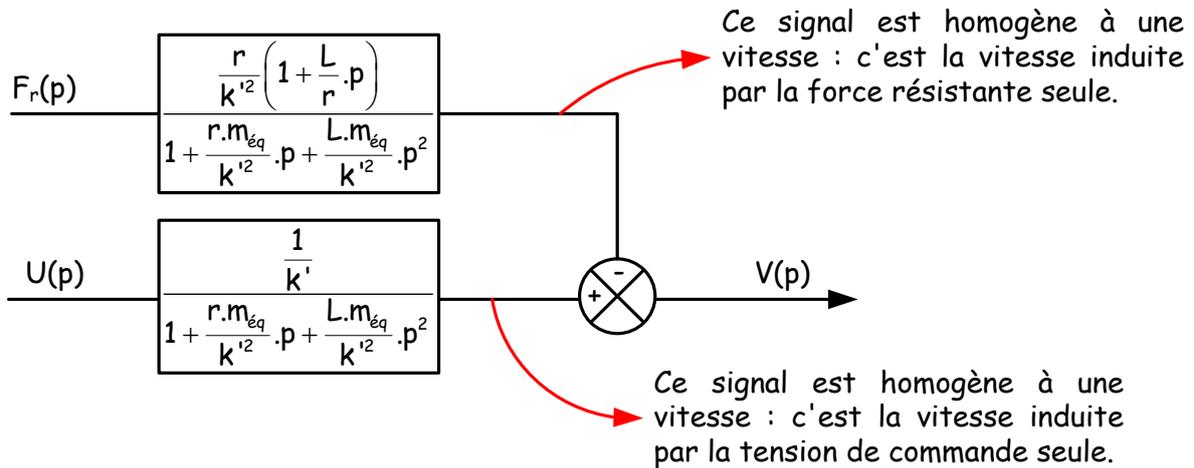
Si on veut valider les ondulations de vitesse et de courant (ou couple moteur) dues au PWM sur la base du modèle de boucle ouverte, on peut utiliser les fonctions de transfert ci-dessous.

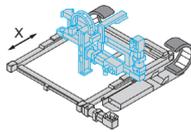
On peut prendre par exemple une force résistante constante  $F_r(t) = 30$  N et une tension rectangulaire de rapport cyclique donné (entre 0 et 1) avec une tension d'alimentation de 40 V.



**Fonctions de transfert pour caractériser l'ondulation de vitesse :**

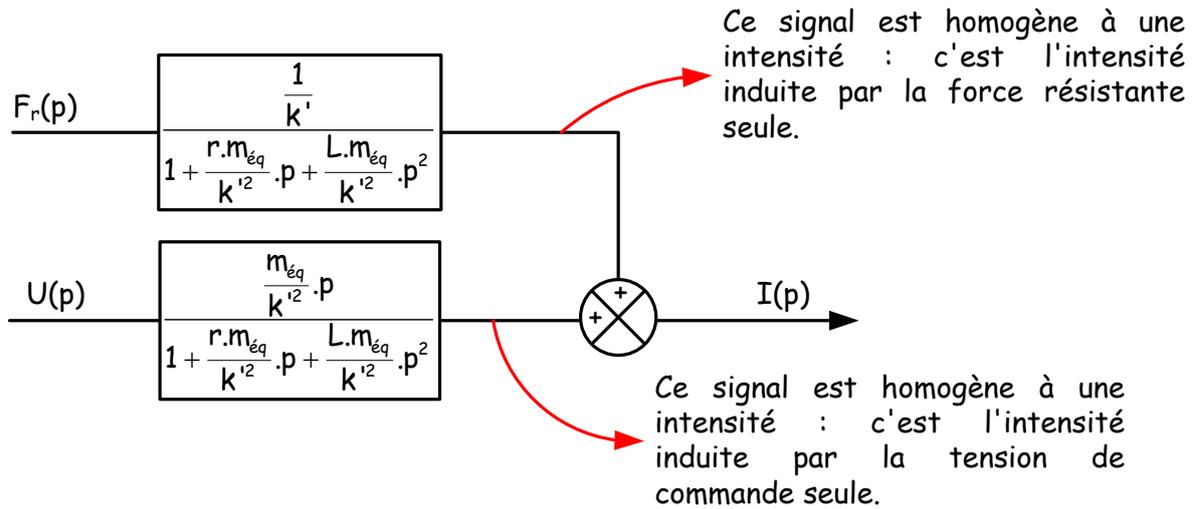
Pour l'ondulation de vitesse c'est la constante de temps mécanique (mode dominant) qui joue un rôle important, la constante de temps électrique pourrait presque être négligée.

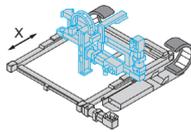




Fonctions de transfert pour caractériser l'ondulation de courant :

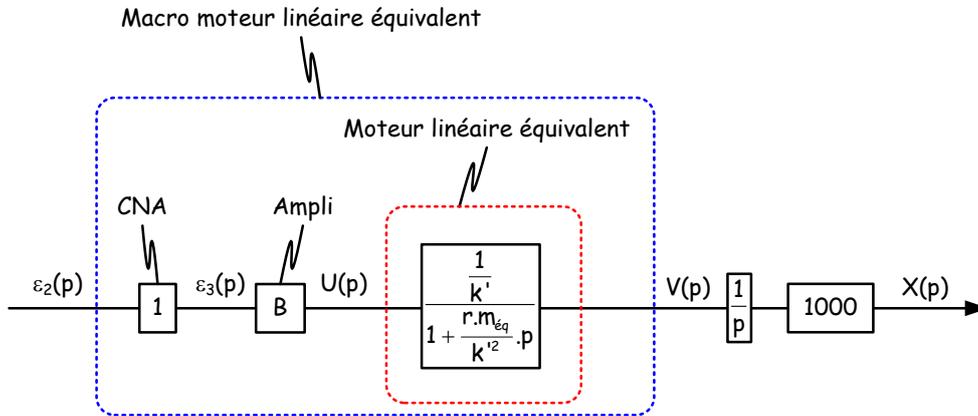
Pour l'ondulation de courant, la constante de temps électrique joue un rôle déterminant : il faut absolument en tenir compte.





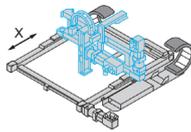
**Modèle pour validation de la non saturation du CAN :**

En boucle ouverte :



En boucle ouverte, c'est évident, il faut  $\varepsilon_2(t) \in [-10V, 10V]$  si on veut éviter toute saturation.

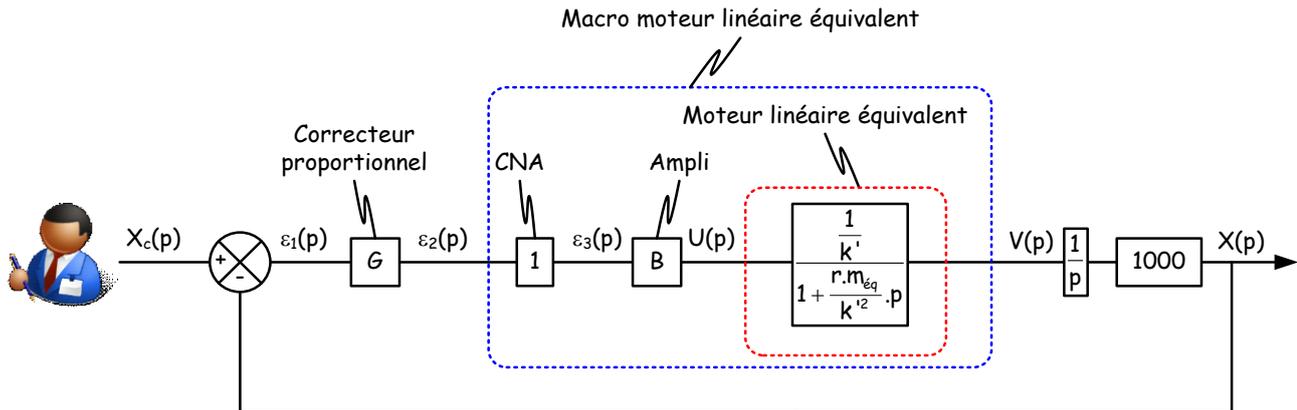
- Si l'entrée est un échelon  $\varepsilon_2(t) = \varepsilon_{20}$ , il faut  $\varepsilon_{20} \in [-10V, 10V]$ .
- Si l'entrée est un sinus  $\varepsilon_2(t) = \varepsilon_{20} \cdot \sin(\omega \cdot t)$  par exemple, il suffit encore de vérifier que  $\varepsilon_{20} \in [-10V, 10V]$ .



En boucle fermée :

Il faut maintenant calculer la fonction de transfert  $\frac{\varepsilon_2(p)}{U(p)}$  pour estimer rapidement les risques de saturation du CNA de la carte de commande.

On travaille dans le cadre du modèle ci-dessous :

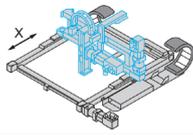


$$\varepsilon_2(p) = \frac{\frac{k'}{1000.B} \cdot p + \frac{r.m_{eq}}{1000.B.k'} \cdot p^2}{1 + \frac{k'}{1000.B.G} \cdot p + \frac{r.m_{eq}}{1000.B.G.k'} \cdot p^2} \cdot X_c(p)$$

Pour qu'il y ait non saturation, il faut qu'on ait toujours  $\varepsilon_2(t) \in [-10V, 10V]$ .

- Si  $x_c(t)$  est un échelon d'amplitude  $x_{c0}$ , c'est évident : il faut  $G \cdot x_{c0} \in [-10V, 10V]$ . Si la saturation doit se produire, elle se produira en particulier à l'instant initial. S'il n'y a pas saturation à l'instant initial, il n'y aura pas saturation plus tard.
- Si  $x_c(t)$  est un sinus,  $x_{c0} \cdot \sin(\omega \cdot t)$  par exemple il faut tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert ci-dessus et vérifier que pour chacune des pulsations d'excitation on ait une tension  $\varepsilon_2(t)$  dans la gamme  $[-10 V, 10 V]$ , c'est-à-dire qu'il ne faut jamais que le gain  $K(\omega)$  de cette fonction de transfert soit tel que  $K(\omega) \cdot x_{c0} \geq 10$ .

**Attention :** Si  $G$  est grand, il y aura surtension et ce n'est pas parce que le système ne sature pas à basse pulsation  $\omega$  avec des produits  $G \cdot x_{c0}$  petits que ce sera encore le cas à plus haute fréquence.



# Modèles plus évolués sur la base du moteur linéaire équivalent

Équivalence frottement sec - seuil d'intensité - seuil de tension

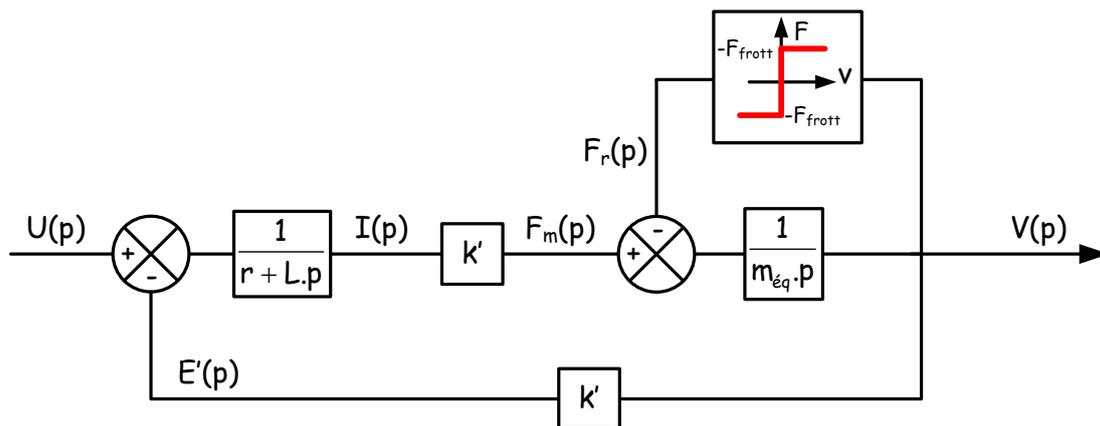
[Ctrl + clic pour revenir au sommaire](#)

On s'intéresse ici à la modélisation d'une force résistante  $F_r(t)$  issue de résistances passives de type frottements secs (balais sur collecteur par exemple) ou de type résistances au roulement (guidage par éléments roulants).

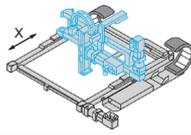
Dans les deux cas, frottements secs ou résistances au roulement, leur comportement est du type : "Il faut un effort moteur suffisant pour réussir à les vaincre et initier le mouvement." Cf. le modèle de Coulomb et le modèle usuel de résistance au roulement.

Dans la suite de ce document, la force résistante  $F_r(t)$  est désignée comme étant une force de frottements secs mais c'est bien en réalité la somme d'une force de résistances au roulement et d'une force de frottements secs dont il s'agit : On la notera  $F_r(t) = \pm F_{\text{frott}}$ . Cette force est constante lorsque le chariot se déplace sauf lorsque son sens de déplacement s'inverse.

On cherche ici à mettre en place une équivalence entre la force  $F_r(t)$  et la tension de seuil du moteur (tension de démarrage).

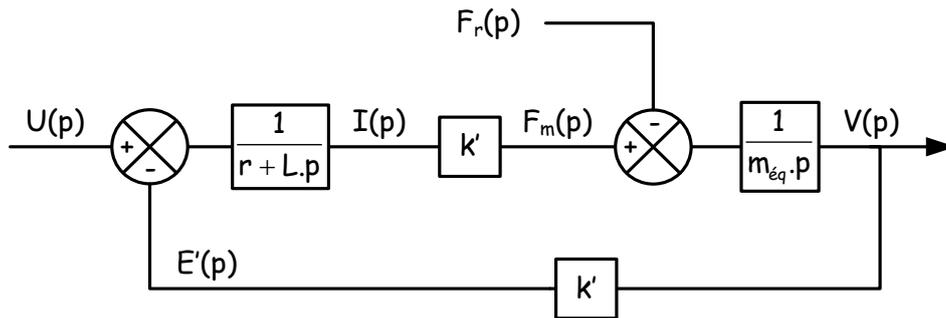


La force  $F_r(t)$  n'est pas externe au mécanisme, elle peut être modélisée par le schéma bloc ci-dessus. Le bloc qui relie la vitesse  $v(t)$  et l'effort résistant  $F_r(t)$  traduit le modèle de Coulomb :



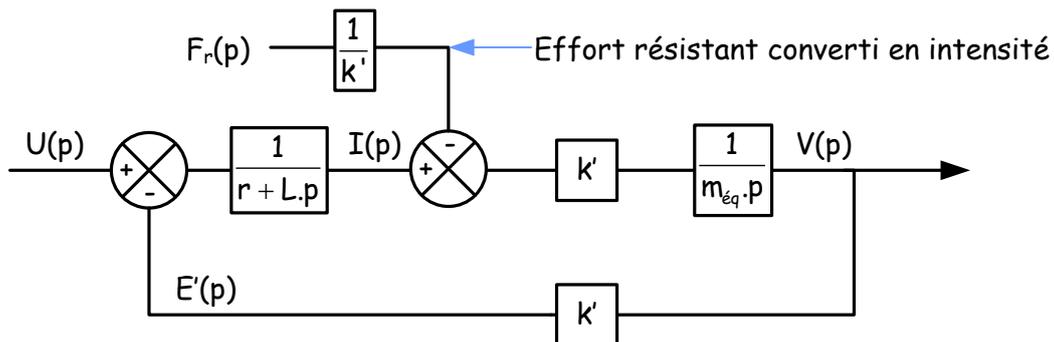
- A vitesse de chariot  $v(t)$  non nulle, il y a frottement,  $F_r(t) = \pm F_{frott}$  avec un signe opposé à la vitesse  $v(t)$ .
- Lorsque la vitesse  $v(t)$  est nulle, il y a adhérence  $F_r(t) \leq F_{frott}$  en valeur absolue...et là, c'est le grand mystère (surtout pour un solveur mathématique).

On part du schéma ci-dessous dans lequel  $F_r(t)$  est une force considérée comme une perturbation.



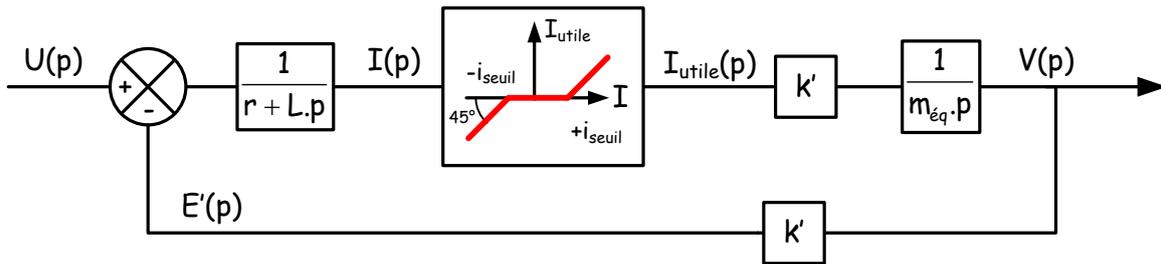
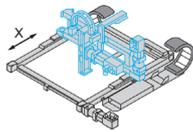
On cherche à transformer l'effort de frottement en tension équivalente : la tension de démarrage ou tension de seuil  $u_{seuil}$  du moteur : la tension nécessaire pour que le moteur commence à tourner.

En déplaçant le soustracteur de forces vers la gauche, on met tout d'abord en évidence une équivalence entre la force résistante  $F_r(p)$  et l'intensité  $I(p) = \frac{F_r(p)}{k'}$ .



La force résistante  $F_r(t)$  étant constante (sauf lors des inversions de sens de déplacement), elle peut être remplacée par  $F_r(t) = \pm F_{frott}$ .

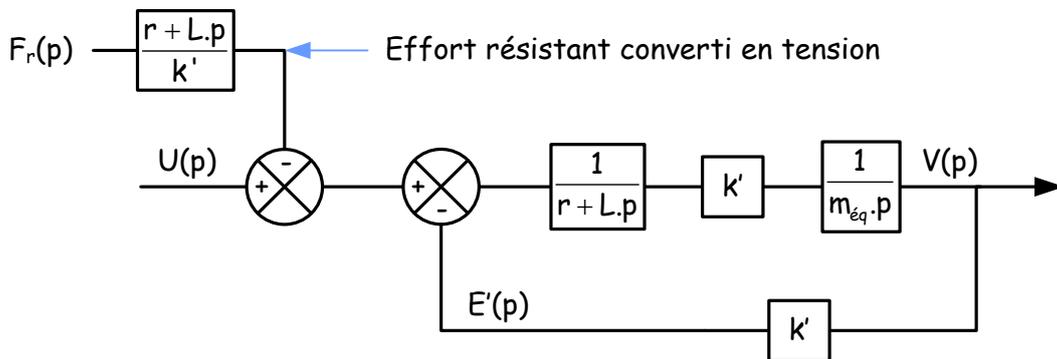
Cela fait apparaître une intensité de seuil  $i_{seuil} = \frac{F_{frott}}{k'}$  qui peut être vue comme l'intensité qui génère une force motrice qui permet d'équilibrer les forces de frottement secs  $F_{frott}$ . (L'intensité nécessaire pour atteindre le bord du cône d'adhérence).



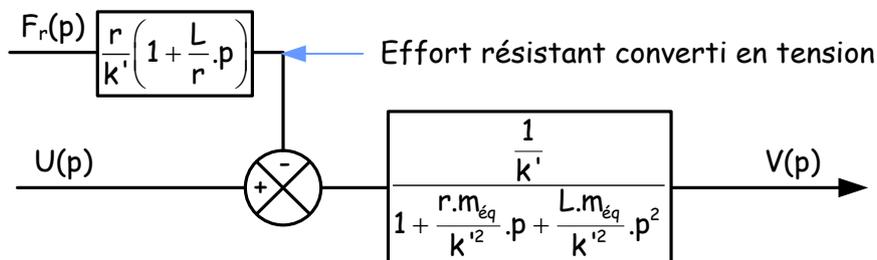
Ce seuil d'intensité à l'intérieur de la boucle n'est pas très pratique puisque cela introduit une non linéarité dans la boucle ce qui nous empêche d'exprimer globalement la fonction de transfert du moteur.

En continuant à déplacer le soustracteur d'intensité vers la gauche, on met en évidence une équivalence entre la force résistante  $F_r(p)$  et la tension  $F_r(p) \cdot \frac{(r + L.p)}{k'}$ .

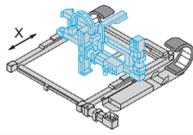
L'original temporel du terme  $F_r(p) \cdot \frac{(r + L.p)}{k'}$  vaut  $F_r(t) = \pm F_{frott} \cdot \frac{r}{k'}$  lorsque le chariot se déplace dans un même sens et  $F_r(t) \leq F_{frott} \cdot \frac{r}{k'}$  en valeur absolue lorsque le chariot est à l'arrêt.



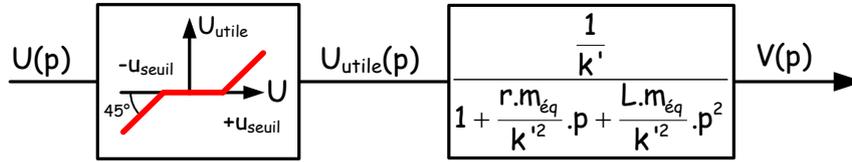
Soit sous forme plus compacte :



On peut alors introduire la tension de seuil  $u_{seuil} = F_{frott} \cdot \frac{r}{k'}$  qui est la tension nécessaire pour lutter contre le couple de frottement sec  $\pm F_{frott}$ .

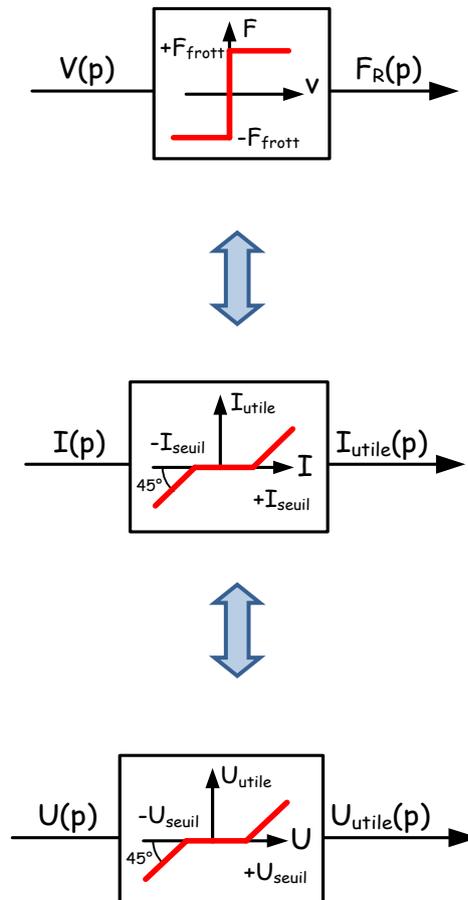


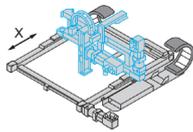
La tension de seuil est la tension qui permet de générer l'intensité qui elle-même génère le couple moteur nécessaire pour atteindre le bord du cône d'adhérence et équilibrer  $F_{frott}$ .



Ce schéma bloc est dans son ensemble non linéaire mais la boucle propre au moteur elle est linéaire. Cela est très pratique puisque on peut mettre en place la fonction de transfert du moteur au moins en tout cas de la tension  $U_{utile}(p)$  vers la vitesse  $V(p)$ .

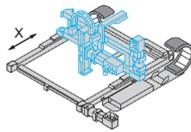
On a au final une équivalence entre la force de frottement sec, son équivalent converti en intensité moteur ou encore son équivalent converti en tension moteur. La forme la plus facile à gérer au niveau des calculs, ceux qui vont nous permettre un calage de correcteur par exemple, est l'équivalence force de frottement sec - tension de seuil.





Il n'y a pas équivalence stricte entre ces différents schémas blocs. La Force  $F_r(t)$  est constante et égale à  $\pm F_{\text{frott}}$  lorsque le chariot se déplace mais à chaque inversion du sens de déplacement il y a une dynamique du type premier ordre de constante de temps  $\frac{L}{r}$  qui est négligée dans le dernier modèle.

Dans les faits, les modèles avec frottements secs ou avec tension de seuil sont tout à fait comparables.

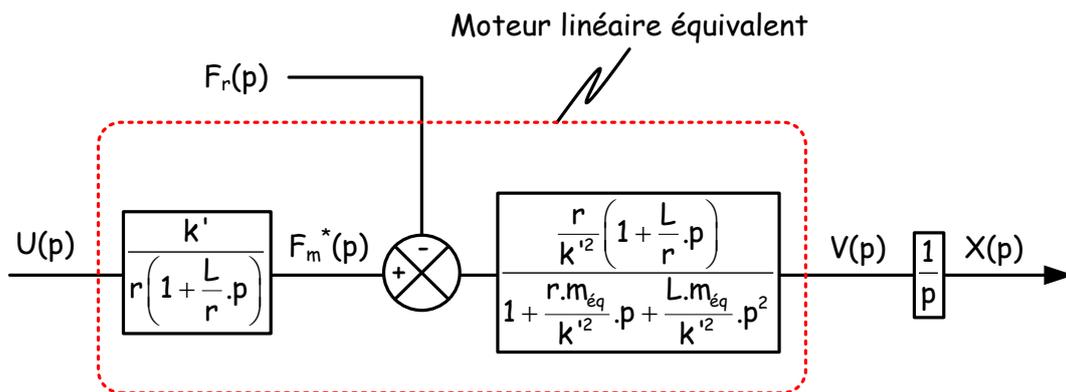


## Modèles dérivés

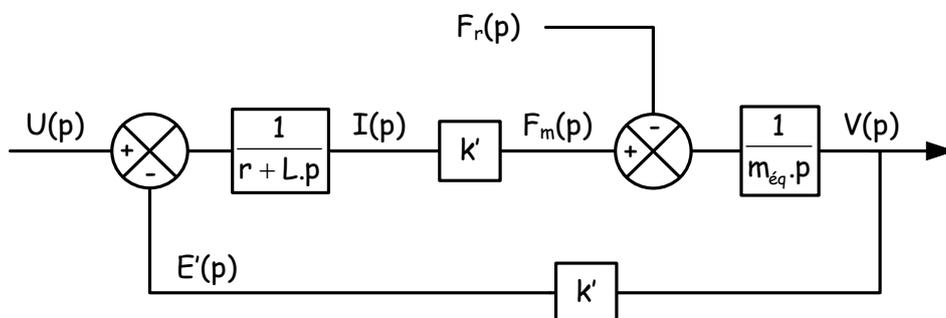
# Prise en compte de tous les efforts perturbateurs

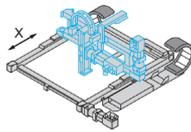
[Ctrl + clic pour revenir au sommaire](#)

On cherche ici à mettre en place un modèle de boucle ouverte qui tienne compte des différents efforts résistants susceptibles d'être rencontrés. On pourrait partir du schéma déjà condensé du moteur linéaire équivalent :



...mais on va repartir en peu plus en amont parce que cela fait apparaître des schémas blocs intéressants :





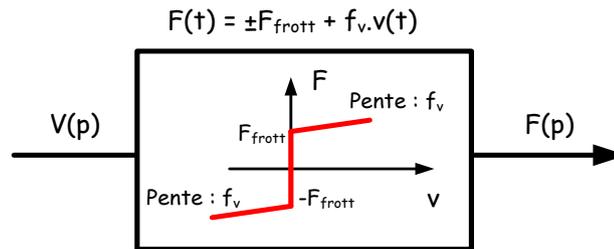
On va maintenant particulariser l'effort perturbateur : Posons  $F_r(t) = F_{ext}(t) \pm F_{frott} - f_v \cdot v(t)$

- $F_{ext}(t)$  est une force extérieure au moteur linéaire comme une charge pesante par exemple.
- $\pm F_{frott}$  est une force résistante de type frottements secs ou résistance au roulement. Le signe est à choisir en fonction de la vitesse  $v(t)$  ou alors il faut prendre  $F_{frott} \cdot \frac{v(t)}{|v(t)|}$  avec

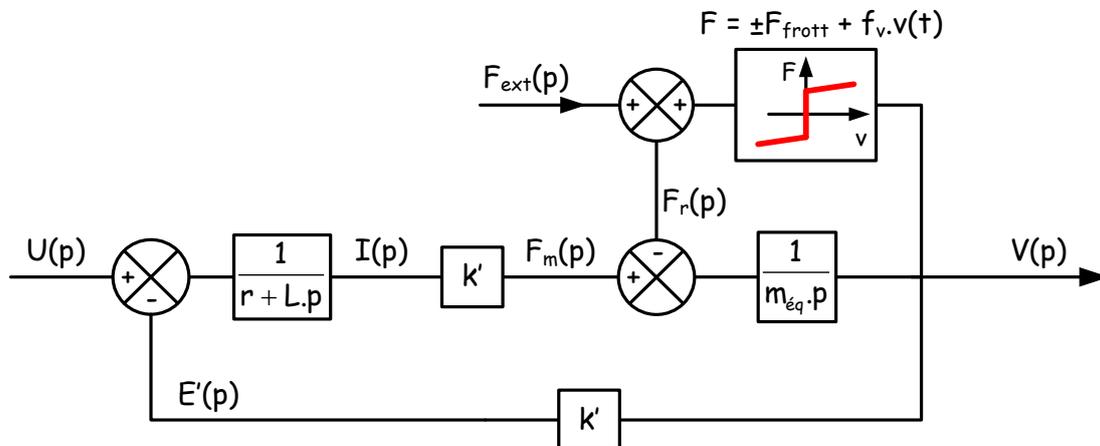
$$F_{frott} \geq 0$$

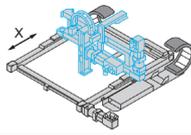
- $f_v \cdot v(t)$  est une force de frottements visqueux ramenés sur le chariot où  $f_v$  est le coefficient de frottements visqueux. On avait déjà introduit le coefficient de frottement visqueux mais ramené sur l'arbre moteur :  $f_\omega$  était tel que  $C_r(t) = -f_\omega \cdot \omega(t)$ . Les deux coefficients sont liés par la relation :  $f_\omega = f_v \cdot \frac{R^2}{i^2}$

On introduit le bloc ci-dessous pour représenter graphiquement la somme des frottements secs et visqueux :

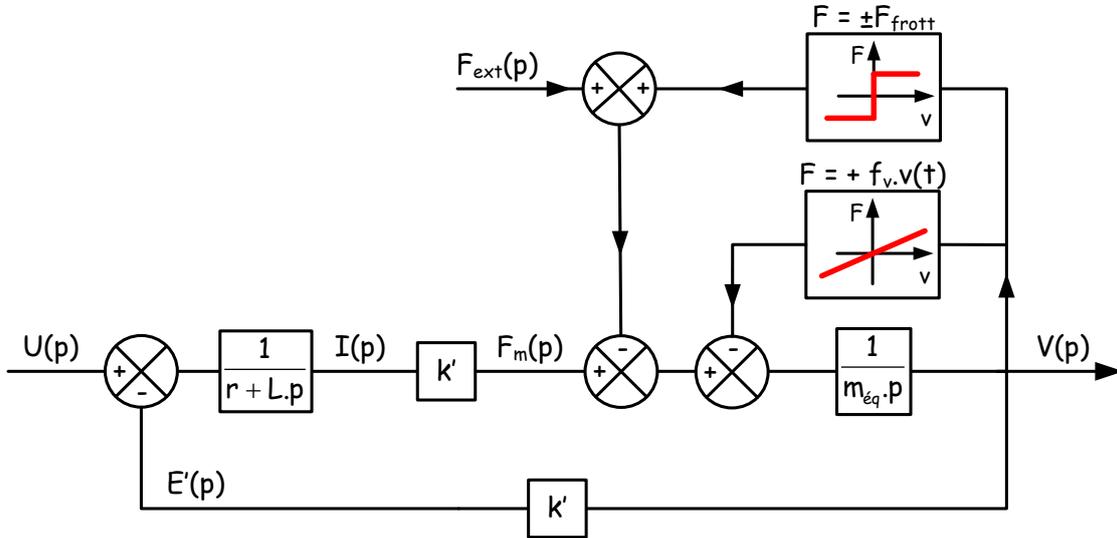


On obtient donc le schéma bloc du moteur linéaire équivalent avec prise en compte de tous ces efforts :

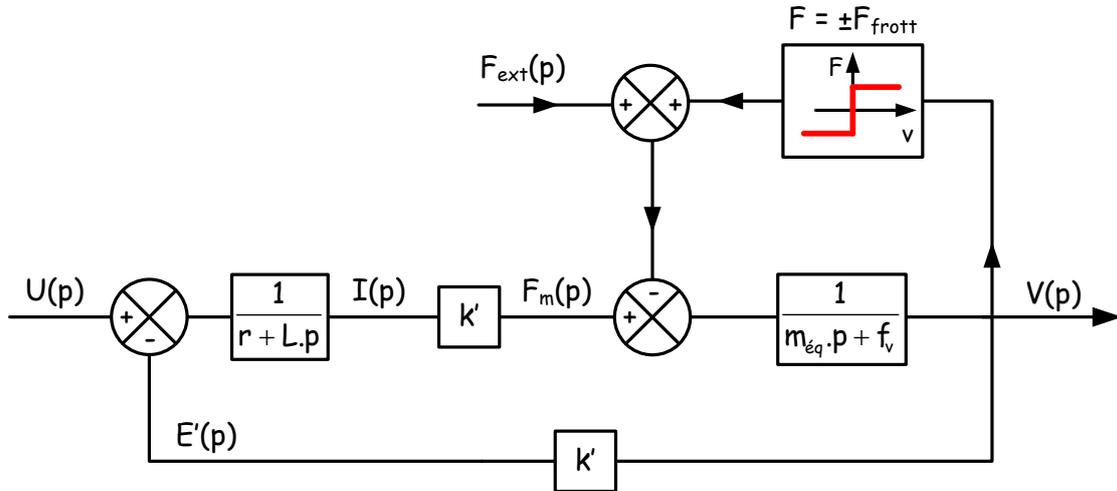




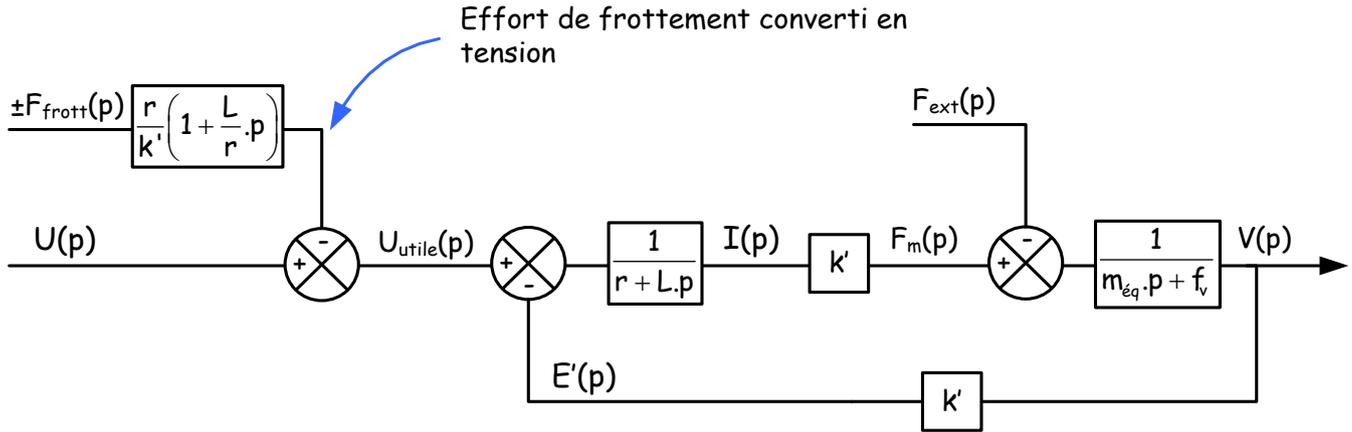
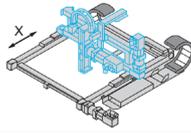
Soit en distinguant les frottements secs et les frottements visqueux :



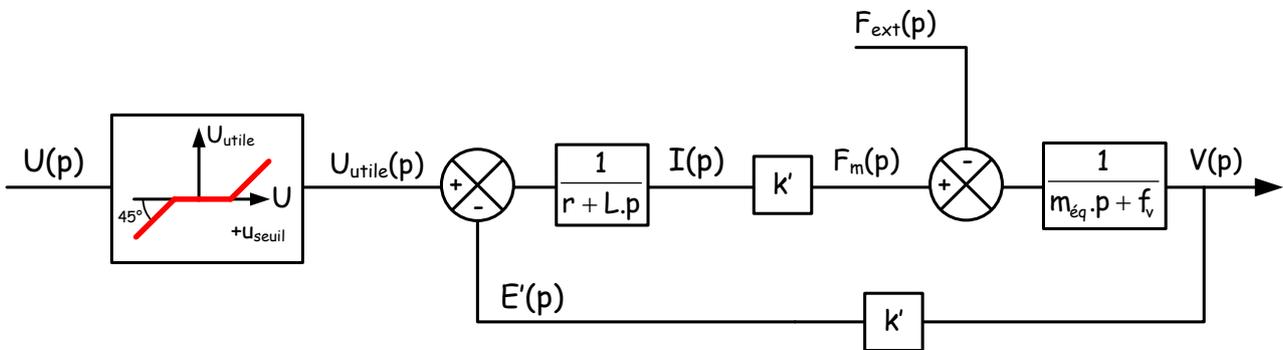
...puis en réduisant la boucle interne



...et en faisant remonter ce qui provient des frottements secs vers l'amont :

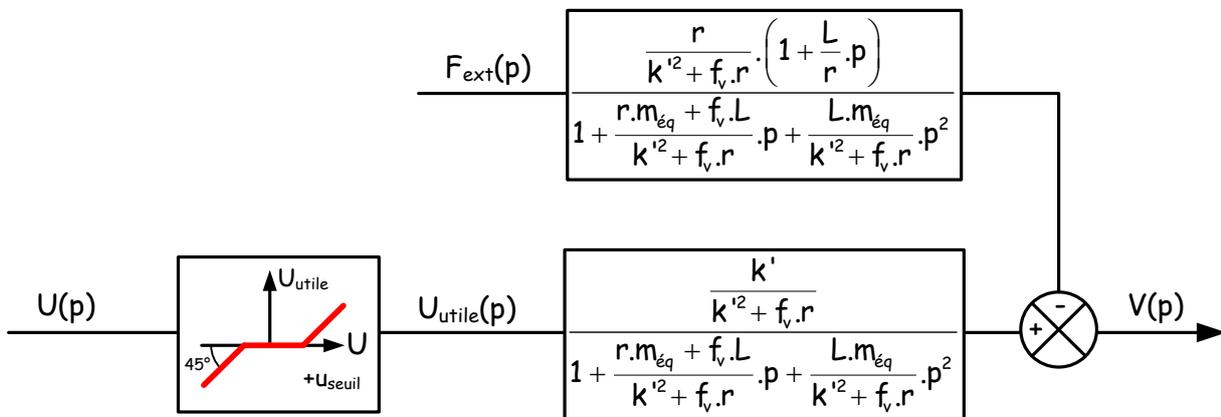


Avec les explications mentionnées précédemment à propos de l'équivalence tension-force de frottement on a alors :

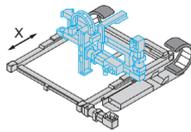


Dans ce schéma, comme expliqué, à chaque inversion du sens de déplacement il y a une dynamique du type premier ordre de constante de temps  $\frac{L}{r} \approx 0.6$  ms qui est négligée. Dans les faits, les modèles avec frottements secs ou avec tension de seuil sont tout à fait comparables.

On a enfin sous une forme plus compacte :



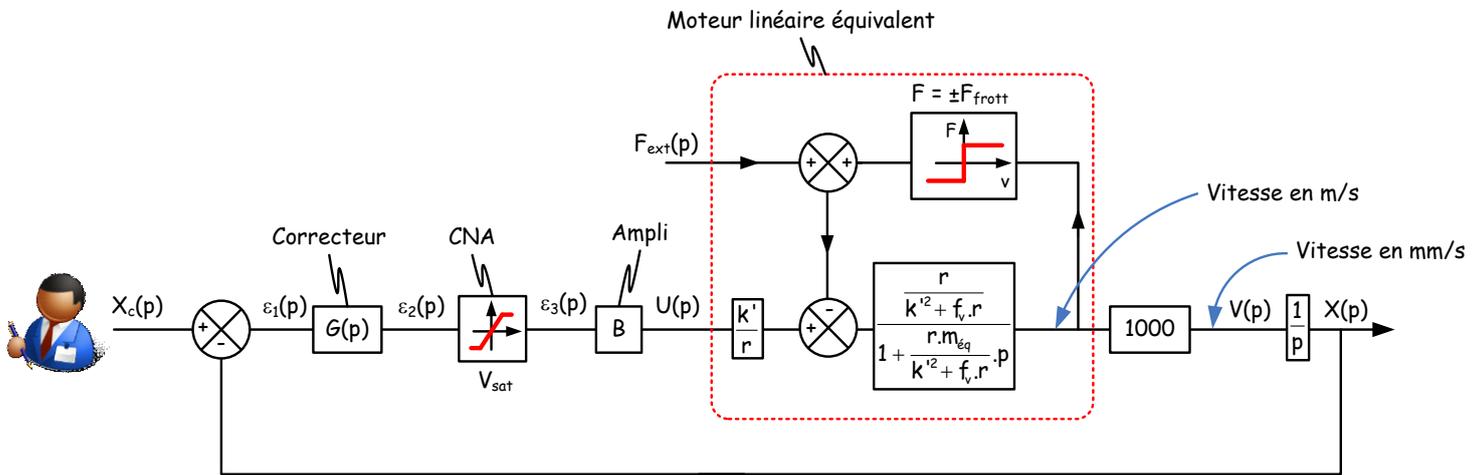
Forme qui constitue un excellent modèle et ce même en négligeant l'effet de l'inductance L.



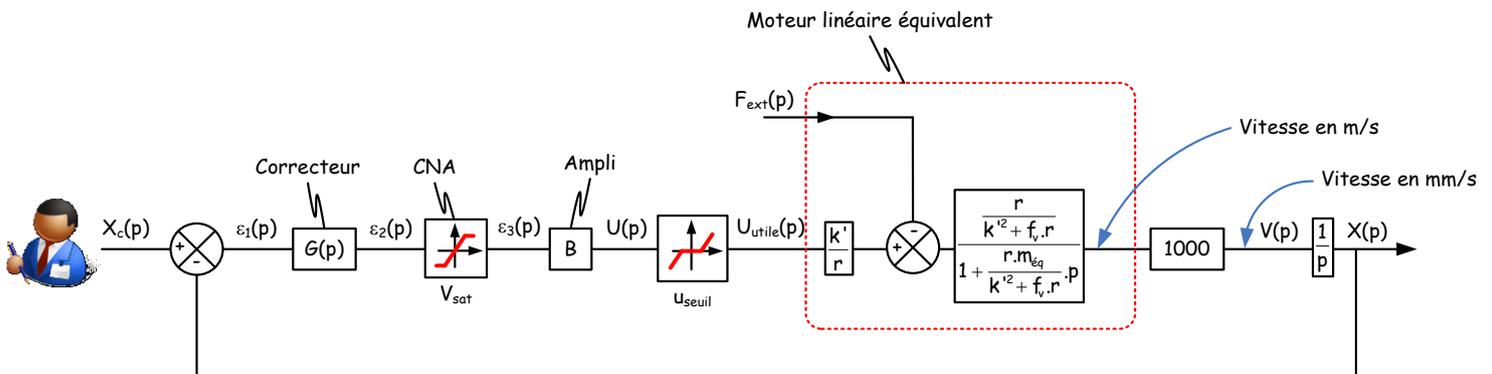
Sur la base de ces quelques schémas, on peut mettre en place une multitude de modèles dérivés selon les hypothèses envisagées :

- Forces de frottements prises en compte ou non : les forces de frottements secs sont les plus contraignantes (d'un point de vue calculatoire). Elles génèrent une non-linéarité qui nous empêche de mettre en place la fonction de transfert en boucle fermée.
- Forces de viscosité prise en compte ou non
- Force extérieure présente ou non
- Dynamique liée à la constante de temps  $\frac{L}{r}$  prise en compte ou non

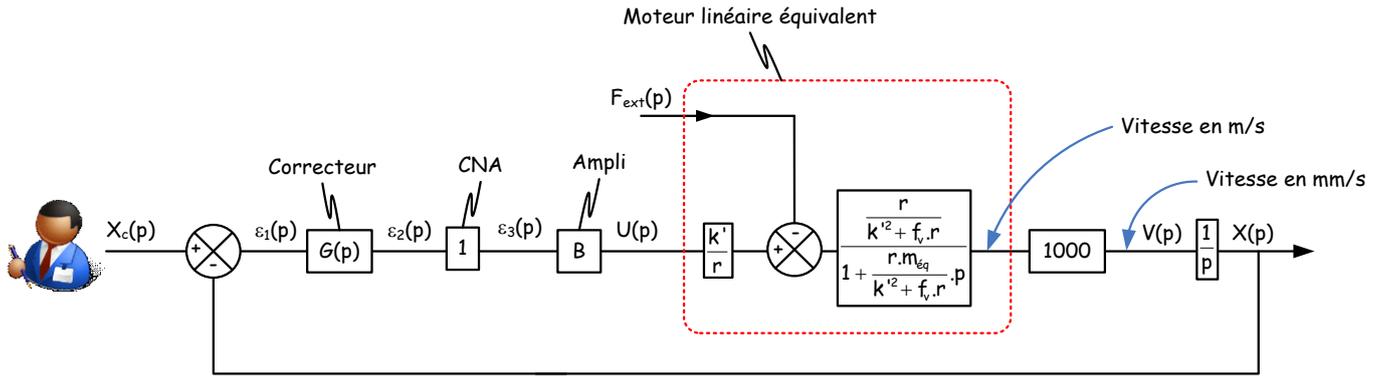
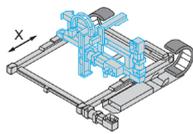
En faisant cette dernière hypothèse par exemple, on obtient le modèle de boucle fermé suivant :



ou encore ce qui revient quasiment au même, comme déjà expliqué :



Le modèle linéaire est celui que l'on obtient en éliminant la saturation et la tension de seuil :



Si on travaille sur le modèle ci-dessus en souhaitant qu'il colle au mieux aux essais que l'on va effectuer sur Control'X, il faut bien sûr se débrouiller pour éviter de trop fortes saturations et éviter de se retrouver en présence de frottements secs mal rejetés.

Concernant la saturation : c'est toujours possible de s'arranger pour qu'elle n'ait pas lieu. Il faut correctement choisir l'amplitude de la consigne par rapport au correcteur : Dans la cas d'un correcteur proportionnel de gain  $G$  par exemple et d'une entrée indicielle d'amplitude  $\Delta x_c$ , il faut que  $|G \cdot \Delta x_c| < 10$ .

Concernant les frottements secs : on ne peut pas les contourner, ils valent ce qu'ils valent. On peut juste se débrouiller pour que leur effet soit minimisé : en choisissant un correcteur adapté.

Par exemple toujours dans le cas d'un correcteur proportionnel de gain  $G$  et d'une entrée indicielle d'amplitude  $\Delta x_c$ , si on a le choix entre les deux essais :

- Un échelon de consigne de  $\Delta x_c = 100$  mm avec un gain  $G = 0.1$
- Un échelon de consigne de  $\Delta x_c = 10$  mm avec un gain  $G = 1$

Le modèle reflétera beaucoup mieux le comportement réel avec la deuxième combinaison ( $G = 1$  et  $\Delta x_c = 10$  mm) car avec ce gain, les perturbations sont 10 fois mieux rejetées. Le modèle ne tient pas compte de ce type de perturbation mais il y est peu sensible cela constitue donc quand même un excellent modèle.

**Valeurs numériques à utiliser pour tous ces modèles :**

$B = 4$

$k' = 25.5 \text{ N/A ou V/(m/s)}$

$r = 5.1 \Omega$

$L = 3.2 \cdot 10^{-3} \text{ H}$

$f_v = 20 \text{ N/(m/s)}$

$m_{eq} = 3.2 \text{ kg}$

Détail du calcul de  $k'$  :  $k' = \frac{k \cdot i}{R}$  avec  $k = 0.21 \text{ (N.m/A)}$ ,  $i = 3$  et  $R = 24.67 \cdot 10^{-3} \text{ m}$